МЕТОДЫ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА В ПРИМЕНЕНИИ К АНАЛИТИЧЕСКИМ МОДЕЛЯМ ПРЕСНОВОДНЫХ ЭКОСИСТЕМ

В.Ю. Агейков

Пресноводные экосистемы используются в бытовых и промышленных целях для водоснабжения и переработки всевозможных отходов, а также в качестве рекреационных зон. Возрастающая антропогенная нагрузка приводит к необратимым изменениям в их структуре, полной деградации и разрушению. Для прогноза экологического состояния пресноводных экосистем с целью своевременного предотвращения этих негативных тенденций используются математические методы моделирования [1, 6, 7, 8], которые позволяют учесть наличие взаимной сопряженности потоков веществ и обратные связи в реальных объектах.

В настоящее время остаются актуальными разработка небольших математических моделей для изучения влияния природных факторов на экосистемы и формулирование теоретических представлений о функционировании водных экосистем. Простые модели и, в частности, аналитические, имеющие свои недостатки, предпочтительнее для целей природопользования. Как бы ни была подробна модель, она всегда будет нереалистична в отношении менее абстрактных уровней биологических организаций. Это компромисс между реальной сложностью системы и простотой ее математического описания.

Аналитическая модель — это качественная модель, которая является теоретической, объяснительной, обобщенной, анализирующей. Благодаря таким моделям появилась возможность воссоздавать многие природные ситуации с колебанием факторов среды, сменой лимитирующих факторов, эволюционными изменениями и т.п., и, таким образом, проводить тщательную идентификацию и верификацию построенных имитационных моделей [6, 7]. При этом имитационные и аналитические направления моделирования имеют тесную связь и берут начало от моделей "Лотки – Вольтерры – Гаузе".

Как правило, водные экологические системы описываются с помощью математического аппарата теории дифференциальных уравнений. Определенная обособленность и изолированность пресноводных экосистем от их экологического окружения дает возможность рассматривать их как биологические реакторы с заданным гидродинамическим режимом и четко определенным набором входов, значения которых характеризуются внешними параметрами, и выходов. При этом биологическая составляющая определяется совокупностью продукционно-деструкционных процессов, структурой и скоростями трансформации органических и минеральных веществ в ходе биотического круговорота. Используя простейшую зависимость Вольтерра для описания жизнедеятельности фитопланктона, аналитическую модель замкнутой пресноводной экосистемы можно представить в виде автономной системы дифференциальных уравнений "водоросли – органика – фосфор" [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\alpha x + \beta x y, \\ \frac{dz}{dt} &= \alpha x - \gamma z, \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma z - \beta x y; \end{aligned} \tag{1}$$

где t — время; x, z и y — концентрации: фитопланктона, органического вещества и минерального биогенного вещества (в данном случае фосфор) соответственно; α, β и γ —коэффициенты: смертности и роста фитопланктона, а также биохимической трансформации органики в минеральное вещество соответственно.

Обычно аналитические модели исследуются методами качественной теории или теории устойчивости [1], или какими-либо другими классическими математическими методами. Но для большинства аналитических моделей водных экосистем существует проблема получения расчетных формул в результате решения их систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Данная работа посвящена исследованию этого вопроса с помощью методов группового анализа [4].

Проверка дифференциальных уравнений модели (1) с помощью теоремы о наличии фундаментальной системы решений [2] уже на начальном этапе дает отрицательный результат. Разрешимые алгебраические группы, которые могли бы позволить получить почти точное (квазиточное) решение (1), представлены всего одной группой сдвига по времени с оператором $\partial/\partial t$. Таким образом, не хватает еще двух групп по другим, но уже зависимым переменным.

Вместо (1) можно использовать следующие упрощенные (рис.1) системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x + \beta xy, \qquad \frac{dy}{dt} = \alpha x(t-\tau) - \beta xy; \tag{2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \delta y(t-\tau_1) - \gamma z, \qquad \frac{dy}{dt} = -\delta y(t-\tau_2) + \gamma z; \tag{3}$$

где τ, τ_1 и τ_2 — временные периоды: распада органического вещества, перехода минерального вещества в органику в результате смертности гидробионтов и перехода минерального вещества в органику в результате роста гидробионтов соответственно; δ — коэффициент биохимического перехода минерального вещества в органику в результате деятельности гидробионтов.

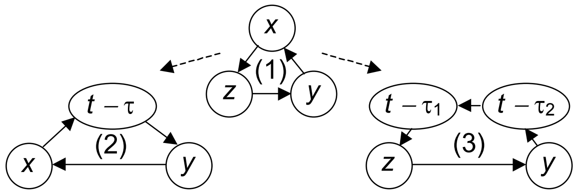

Рис.1. Схемы взаимодействия компонентов модели и вариантов ее упрощения.

Системы дифференциальных уравнений (2) и (3), так же как и (1), не имеют фундаментальной системы решений, что легко проверить с помощью расчета соответствующих системам скобок Ли [5]. Версия (2), известная из работы [1], не имеет ни одной разрешимой группы, а версия (3), представленная фрагментарно в работе [1] для разомкнутой водной экосистемы, имеет одну разрешимую группу растяжений по зависимым переменным с оператором $z\cdot\partial/\partial z + y\cdot\partial/\partial y$. Кроме того, последняя версия аналитической модели получилась более универсальной в гидробиологическом смысле, т.к. достаточно гибко учитывает влияние фитопланктона, представленного в неявном виде, и позволяет неявно учесть влияние на моделируемые процессы других гидробионтов — бактериопланктона и зоопланктона (хищного и простейших). Далее будем рассматривать только эту версию системы дифференциальных уравнений.

Предположим, что для коэффициентов и временных периодов модели (3) возможны определенные связи и соотношения. Рассмотрим один из частных случаев, который, как будет показано ниже, является вполне допустимым:

$$\delta = \left(\frac{\gamma'}{\tau_2' - \tau_1'}\right)^2 \cdot \delta', \qquad \gamma = \frac{\gamma'}{\tau_2' - \tau_1'}, \qquad \tau_2 - \tau_1 = \frac{\tau_2' - \tau_1'}{\gamma'}. \tag{4}$$

Будем использовать соотношения (4) применительно к (3) для всех вариантов отношений τ_1 и τ_2, кроме случая $\tau_1 = \tau_2$.

При отношении $\tau_1 = \tau_2$ можно произвести редукцию системы дифференциальных уравнений (3). В результате применения теоремы о редукции [5] получим:

$$z = -y, \qquad \frac{dy}{dt} = -y\big(\delta(t-\tau) + \gamma\big);$$

где $\tau = \tau_1 = \tau_2$. Здесь для зависимой переменной y имеем однородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка, для которого известна разрешимая группа с оператором $y\cdot\partial/\partial y$ [3], позволяющая получить точное решение данной системы.

Для остальных вариантов отношений τ_1 и τ_2, используя подстановку (4) и решая уравнения определяющие группу [5], получим следующий набор разрешимых алгебраических групп для (3) с двумя операторами W_1 и W_2 следующего вида:

$$W_1 = y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z};$$

$$W_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \delta \cdot \gamma \cdot \frac{t-\tau_2}{\tau_2-\tau_1}\frac{\partial}{\partial z}, \text{ для } \tau_1 > \tau_2; \quad (5)$$

$$W_2 = \frac{\partial}{\partial y} - \delta \cdot \left(1 - \gamma \cdot \frac{t-\tau_1}{\tau_2-\tau_1}\right)\frac{\partial}{\partial z}, \text{ для } \tau_1 < \tau_2;$$

где скобка Ли $[W_1, W_2] = -W_2$ показывает приоритетность использования оператора W_2 в первую очередь применительно к дифференциальным уравнениям (3).

Отметим также, что подстановка (4) не привела к выполнению условий существования фундаментальной системы решений [2] для (3), что легко показать для соответствующих системе операторов V_1 (для него представлены члены при t^0) и V_2 (для него представлены члены при t^1), которые выводятся по условиям теоремы для каждой системы дифференциальных уравнений индивидуально:

$$V_1 = (\delta \cdot y \cdot \tau_2 + \gamma \cdot z)\frac{\partial}{\partial y} - (\delta \cdot y \cdot \tau_1 + \gamma \cdot z)\frac{\partial}{\partial z},$$

$$V_2 = -\delta \cdot y\frac{\partial}{\partial y} + \delta \cdot y\frac{\partial}{\partial z}.$$

Скобка Ли $[V_1, V_2]$ представляет из себя следующую комбинацию:

$$\delta \cdot (y \cdot (\delta \cdot (\tau_1 + \tau_2) - \gamma) - \gamma \cdot z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

но это не тот результат, который следует ожидать при выполнении условий теоремы о существовании фундаментальной системы решений. Результат должен быть линейной комбинацией вида $a \cdot V_1 + b \cdot V_2$, с коэффициентами a, $b = const$. Это означает, что решение, которое будет получено с помощью групповых операторов (5), не является точным в общепринятом смысле, а будет квазиточным, т.к. будет включать в себя элементы, для которых необходимы численные расчеты. В рассматриваемом случае это будет так называемая "стандартная функция ошибок" [5]. Это не слишком неудобное препятствие для использования формул (4) в (3), потому что таким образом решается проблема получения расчетных формул для нелинейных дифференциальных уравнений аналитической модели, обозначенная выше.

Как показывает практика реального моделирования [6, 7, 8], для модели (3) при условиях (4) можно подобрать такие комбинации численных значений временных периодов и коэффициентов, которые позволят получать правдоподобные результаты при использовании расчетных формул, выводимых из (3) и (4). Так, в случае $\tau_2' - \tau_1' \to 1$ имеем $\gamma' \to \gamma$, для коэффициента $\gamma' \to 1$ усиливается значимость настройки τ_1', и τ_2', и т.д. В частности, правильным подбором значений коэффициента δ' можно снизить влияние изменяемых величин γ' и τ_1', τ_2'. Выбрать подходящее направление для настройки модели можно также через использование определенных комбинаций разных наборов коэффициентов для различных периодов расчетного времени [8].

В итоге отметим основные выводы, которые были получены в данной работе:

1. На основе теоретических исследований работы [1] сформулирована явным образом универсальная аналитическая модель водных экосистем.
2. Предложено решение проблемы получения расчетных формул для зависимых переменных из нелинейной системы дифференциальных уравнений аналитической модели.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, д.т.н., профессору А.А. Цхаю за полезные консультации по рассмотренной теме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Домбровский Ю.А., Ильичев В.Г., Селютин В.В., Сурков Ф.А. Теоретические и прикладные аспекты моделирования первичной продуктивности водоемов. Ростов-на-Дону: Издательство Ростовского университета, 1990. - 176 с.
2. Ибрагимов Н.Х. Азбука группового анализа. - М.: Знание, 1989. - 48 с.
3. Ибрагимов Н.Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Знание, 1991. - 48 с.
4. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 400 с.
5. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям: Пер. с англ. - М: Мир, 1989. - 639 с.
6. Цхай А.А., Агейков В.Ю. Математическое моделирование процессов трансформации соединений азота и фосфора и изменчивости кислородного режима в водохранилище // Водные ресурсы. - 1997. - № 6 - С. 718 - 728.

7. Tskhai A.A., Ageikov V.Yu. Simulation of nutrient transformation in a reservoir ecosystem // Hydrological, Chemical and Biological Processes of Transformation and Transport of Contaminants in Aquatic Environments. - IAHS Publ., 1994. - № 219. - PP. 303 - 308.
8. Tskhai A.A., Ageikov V.Yu., Koshelev K.B., Leites M.A., Tskhai T.V. Models for water monitoring and optimization of enterprise water protective activity in present-day conditions // International Congress "Water: Ecology and Technology". - Moscow, Sept. 6-9, 1994. - Vol. IV. - PP. 1090 - 1115.