

## ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКИХ СРЕД В ПРОНИЦАЕМЫХ КАНАЛАХ

С.А. Светлов, Ф.Ф. Спиридонов, Л.В. Китаева

Скоростное поле во всякой сплошной среде описывается уравнением движения, которое может быть получено из обобщенного дифференциального уравнения переноса. Задачи о течениях в плоских и осесимметричных каналах с пористыми стенками являются двухмерными. В связи с необходимостью интенсификации процессов очистки жидкостей от примесей возникает потребность в применении проницаемых каналов неосесимметричной формы [1], что является одним способом увеличения рабочей поверхности фильтра. Гидродинамика потоков в таких каналах описывается с помощью системы уравнений, включающей в себя закон сохранения массы (уравнение неразрывности) и уравнения Навье – Стокса с соответствующими начальными и граничными условиями. Полагаем, что движение жидкости в канале произвольной формы с проницаемыми стенками является квазистационарным и описывается полной системой уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости при соответствующих начальных и граничных условиях.

Рассмотрим движение невязкой жидкости в плоском канале с полушириной  $H$ , стенки которого проницаемы. Через стенку канала по нормали к ней осуществляется подача жидкости с неизменной вдоль проницаемой стенки скоростью  $q_+$  (рис. 1). Вследствие того, что жидкость полагается невязкой, характерное число Рейнольдса  $Re_0 \rightarrow \infty$ . Движение рассматривается в декартовой системе координат  $(z, y)$ , где ось  $z$  совпадает с плоскостью (осью) симметрии течения, а  $y$  ей ортогональна. Вектор скорости имеет компоненты  $w$  и  $v$  вдоль осей  $z$  и  $y$ , соответственно. Рассмотрим трубку тока, начинающуюся в сечении  $\zeta$  и проходящую через сечение  $z$ . Обозначим периметр канала рассматриваемой трубки тока в сечении  $z$  через  $\Pi$ , а площадь его поперечного сечения –  $F$ . Полагая плотность жидкости  $\rho = 1$ , из

расходных характеристик нетрудно получить соотношение

$$v = q_+ \frac{\Pi_0}{\Pi} \cdot \frac{\zeta}{z}. \quad (1)$$

Очевидно, периметр является функцией координат, то есть  $\Pi = \Pi(\zeta, z)$ .

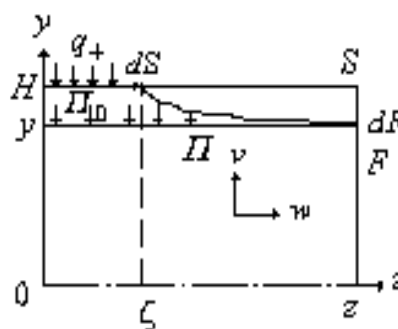


Рис. 1. Схема течения жидкости в плоском фильтрующем канале.

Поскольку в рассматриваемом случае  $q_+$  не зависит от  $\zeta$  и  $z$ , то  $v$ -компонента вектора скорости должна зависеть только от координаты  $y$ . Следовательно, величина  $\zeta / \Pi z$  является некоторой функцией координаты  $y$ . С другой стороны, для рассматриваемой трубки тока можно записать баланс расхода, из которого следует соотношение

$$w = q_+ \frac{dS}{dF}. \quad (2)$$

где  $dS$  и  $dF$  - площади поперечного сечения трубки тока, соответственно, в ее начале и конце.

Введем безразмерные переменные:

$$v_1 = \frac{v}{q_+}, \quad w_1 = \frac{w}{q_+}, \quad \text{тогда профили скоростей примут вид:}$$

$$v_1 = \frac{\Pi_0}{\Pi} \cdot \frac{\zeta}{z}, \quad w_1 = \frac{dS}{dF}. \quad (3)$$

Попытаемся определить структуру определенных выше функций с помощью известных решений. Известны решения для течений в плоском [2], осесимметричном цилиндрическом [3] и кольцевом [4] каналах. Компоненты вектора скорости для плоского течения выражаются зависимостями

$$v_1 = -\sin \frac{\pi}{2} \frac{y}{H}, w_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{H} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \frac{y}{H}. \quad (4)$$

Поскольку можно положить  $\Pi_0 = \Pi = 1$ , то из сравнения уравнений (1), (3) и (4) следует

$$v_1 = -\frac{\Pi_0}{\Pi} \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{H}, \frac{\zeta}{z} = \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{y}{H}.$$

Кроме того, поскольку отношение  $\frac{y}{H}$

есть не что иное, как отношение площади поперечного сечения рассматриваемой трубки тока в сечении  $z$  к площади поперечного сечения канала, то обозначив это соотношение

безразмерной переменной  $\sigma = \frac{F}{F_0}$ , выра-

жение для  $v$ -компоненты вектора скорости можно записать:

$$v = -\frac{\Pi_0}{\Pi} \sin \frac{\pi}{2} \sigma. \quad (5)$$

Аналогично, из сравнения зависимостей (2), (3) и (4) для  $w$ -компоненты вектора скорости получим:

$$w = \frac{\pi}{2} \frac{z \Pi_0}{F_0} \cos \frac{\pi}{2} \sigma. \quad (6)$$

Таким образом,  $\frac{dS}{dF} = \frac{\pi}{2} \frac{S(z)}{F_0} \cos \frac{\pi}{2} \sigma$ ,

где  $S(z)$ - площадь пронизываемой поверхности канала до сечения  $z$ ;  $dS$ ,  $dF$ ,  $S(z)$  и  $F_0$  – размерные переменные.

Поскольку  $\frac{dF}{F_0} = d\sigma$ , то определяемые

функции запишутся в виде

$$\frac{\zeta}{z} = \sin \frac{\pi}{2} \sigma, \frac{1}{S(z)} \frac{dS}{d\sigma} = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \sigma. \quad (7)$$

Выразим из (7)  $\frac{dS}{S(z)}$ :

$$\frac{dS}{S(z)} = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} \sigma \cdot d\sigma.$$

$$\frac{dS}{S(z)} = \frac{S(\zeta) - S(0)}{S(z)}.$$

Поскольку  $S(0) = 0$ ,  $S(\zeta) = \Pi_0 \zeta$ ,  $S(z) = \Pi_0 z$ , то

$$\frac{dS}{S(z)} = \frac{\zeta}{z} = \sin \frac{\pi}{2} \sigma.$$

По сути соотношения (7) задают нелинейное преобразование ( $\frac{\zeta}{z} \rightarrow \sigma$ ,  $S(z) \rightarrow \sigma$ ).

Рассмотрим осесимметричное течение. В этом случае

$$v_1 = -\frac{R}{r} \sin \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{R^2},$$

$$w_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{R} z \cdot \cos \frac{\pi}{2} \frac{r^2}{R^2},$$

где  $R$  - радиус канала.

Аналогично предыдущему можно убедиться, что в обобщенном виде выражение для компонент вектора скорости запишутся

$$v = -\frac{\Pi_0}{\Pi} \sin \frac{\pi}{2} \sigma, \quad (8)$$

$$w = \frac{\pi}{2} \frac{S(z)}{F_0} \cos \frac{\pi}{2} \sigma.$$

Для осесимметричного кольцевого течения справедливы зависимости

$$v = -\frac{R_2}{r} \sin \frac{\pi}{2} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2},$$

$$w = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2\pi R_2}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \cdot z \cdot \cos \frac{\pi}{2} \frac{\pi(r^2 - R_1^2)}{\pi(R_2^2 - R_1^2)}, \quad (9)$$

где  $R_1$ ,  $R_2$  – соответственно, внутренний и наружный радиус канала.

Проведя соответствующий анализ для этого случая нетрудно получить зависимости (8). Таким образом, показано, что для всех трех случаев течений профили скоростей имеют вид определяемый уравнениями (8).

Это делает возможным введение обобщенных координат  $(\sigma, \xi)$ , где  $\sigma$ -аналог площади, а  $\xi = \frac{\Pi}{\Pi_0}$  - безразмерный периметр

для плоского или осесимметричного каналов. Очевидно, переменные  $\sigma$  и  $\xi$  не являются независимыми, они связаны функционально. Предполагается, что такой подход будет также эффективным и при исследовании аналогичных трехмерных течений.

Следует отметить, что рассмотренные течения обладают полной симметрией: в плоском канале параметры течения не зависят от координаты  $x$ , а в осесимметричном - от угла  $\varphi$ . Наиболее простым трехмерным, является течение в канале квадратного поперечного сечения, обладающее частичной симметрией. Для него также справедливы все полученные выше зависимости, если вместо  $V$ -компоненты вектора скорости рассматривать  $q$ -компоненту, ортогональную линиям уровня  $w = const$ .

Известно [2], что для плоских и осесимметричных течений в каналах с пористыми стенками характерно то, что профили компонент вектора скорости консервативны в широком диапазоне значений числа Рейнольдса. Это говорит о том, что силы вязкого трения слабо влияют на структуру течения и динамический пограничный слой вблизи пористой стенки фильтра отсутствует. В связи с этим представляет интерес исследование аналогичных трехмерных течений на основе автомодельных решений уравнений гидродинамики. Рассмотрим течения в каналах, образующая которых является прямой линией, а направляющая обладает полной или частичной симметрией той или иной степени в плоскости поперечного сечения канала (рис. 2).

Исследуемое движение описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{v} = 0 \\ (\bar{v} \bar{\nabla}) \bar{v} = -\bar{\nabla} p + \frac{1}{Re_0} \Delta \bar{v}, \end{cases} \quad (10)$$

где, соответственно, на переднем крае канала  $\bar{v} = 0$ , на стенках канала  $\bar{v} = -\bar{n}$ ;  $\operatorname{div}, \bar{\nabla}$  - дифференциальные операторы дивергенции и Гамильтона.

Решение системы (10) зависит от величины  $Re_0$ . Рассмотрим два возможных предельных случая решения при  $Re_0 \rightarrow 0$  и  $Re_0 \rightarrow \infty$ . В случае модели "исчезающей вязкости" ( $Re_0 \rightarrow \infty$ ) вязкими членами системы уравнений можно пренебречь. В силу автомодельности задачи будем искать ее решение в виде

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

$$w = zW(x, y),$$

$$p = p_0 - \frac{1}{2} c^2 z^2 + p_1(x, y),$$

где  $p_0$  - значение давления в начале координат, а неизвестные константа  $c$  и функция  $p_1(x, y)$  подлежат определению.

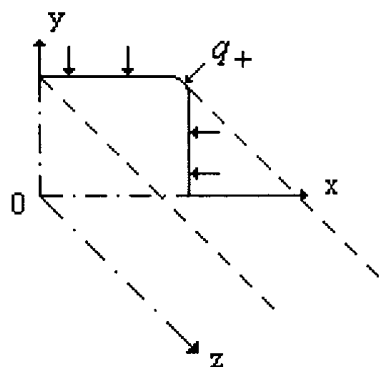


Рис. 2. Схема поперечного сечения пористого канала.

Система (10) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + W = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial p_1}{\partial x} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial p_1}{\partial y} \\ u \frac{\partial W}{\partial x} + v \frac{\partial W}{\partial y} + W^2 = c^2, \end{cases} \quad (11)$$

и система (11) разделяется на две системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + W = 0, \\ u \frac{\partial W}{\partial x} + v \frac{\partial W}{\partial y} + W^2 = c^2, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p_1}{\partial y}. \end{cases} \quad (13)$$

Нетрудно видеть из второго уравнения системы (12), что на оси канала (в силу граничных условий  $u=v=0$ ), в любом его поперечном сечении  $W^2(0,0) = c^2$ , следовательно  $W(0,0) = c = W_{max}$ .

На основе известных решений для двухмерных течений можно ввести обобщенные координаты  $(\sigma, \xi, z)$ , где  $\sigma$  - аналог площади канала,  $\xi$  - безразмерный периметр, аналог координаты  $x$  в плоском случае или угла  $\varphi$  в осесимметричном. Перейдем от декартовых координат к новым:  $\vec{r}(x, y, z) \rightarrow \vec{r}(\sigma, \xi, z)$  (рис. 3).

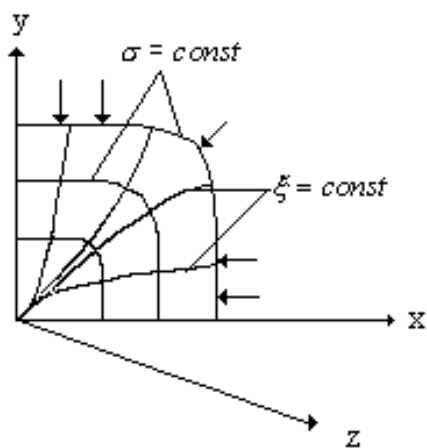


Рис. 3. Схема поперечного сечения канала в криволинейных координатах.

По аналогии с соотношениями (2,3)

$$w = z \cdot W(\sigma, \xi), \quad q = q(\sigma, \xi). \quad (14)$$

Полагаем, что  $\sigma \in [0,1]$ ,  $\xi \in [0,1]$ ,  $\sigma = 1$

на стенке канала,  $\xi = 1$  при полном обходе периметра канала.

Введем вектор завихренности:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \vec{e}_\sigma - \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \sigma} \cdot \vec{e}_\xi - \frac{1}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial(h_1 q)}{\partial \xi} \cdot \vec{e}_z,$$

где  $h_1 = h_1(\sigma, \xi)$ ,  $h_2 = h_2(\sigma, \xi)$  - коэффициенты Ламе.

Поскольку движение происходит вдоль поверхностей тока  $\xi = const$ , то очевидно

$$\omega_\sigma = \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0.$$

Полагая  $h_2(\sigma, \xi)$  ограниченной функцией, имеем

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$$

или, учитывая (14),

$$w = z \cdot W(\sigma). \quad (15)$$

Таким образом, линии уровня  $W = const$  совпадают с линиями уровня  $\sigma = const$ . Нетрудно убедиться, что это справедливо для известных решений. Предполагается, что движение жидкости происходит по некоторым пространственным трубкам тока. Рассмотрим элементарную струйку тока. Для нее баланс расхода запишется в виде

$$d\Pi_0 dz = w dx dy, \quad (16)$$

где  $d\Pi_0$  - элемент периметра поперечного сечения трубки тока на стенке канала.

Учитывая (15) и то, что

$$dx dy = h_1 h_2 d\sigma d\xi,$$

равенство (16) можно записать в виде

$$d\Pi_0 dz = z_1 W h_1 h_2 d\sigma d\xi,$$

где  $z = z_1$  соответствует некоторому сечению канала.

Введем безразмерные переменные

$$d\Theta = \frac{d\Pi_0}{\Pi_0}, \quad \zeta = \frac{z}{z_1}.$$

Теперь вместо (16) имеем

$$d\Theta d\zeta = \frac{W}{\Pi_0} h_1 h_2 d\sigma d\xi,$$

откуда

$$h_1 h_2 = \frac{\Pi_0}{W} \cdot \frac{d\Theta \cdot d\xi}{d\sigma \cdot d\xi}. \quad (17)$$

Поскольку скорость потока постоянна вдоль  $\Pi_0$ , то в качестве одного из условий можно считать

$$\frac{d\Theta}{d\xi} = 1. \quad (18)$$

Таким образом, значение  $\Theta$  отличается от  $\xi$  на константу, которую без ущерба для общности полагаем равной нулю.

В силу однородности граничных условий можно полагать, что

$$h_1 h_2 \neq f(\xi).$$

Тогда для дальнейшего анализа второе условие запишем в виде

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = \frac{A}{\Pi_0} \cdot W(\sigma), \quad (19)$$

где  $A = const$ .

С учетом (13) и (14) из (12) получим

$$h_1 h_2 = \frac{\Pi_0}{W} \frac{A}{\Pi_0} \cdot W = A = const.$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что

$$h_2(1, \xi) = 1.$$

Система уравнений (11) в обобщенных координатах запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} (h_1 q) + W = 0, \\ \frac{q}{h_1} \cdot \frac{\partial q}{\partial \sigma} = -\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \sigma}, \\ \frac{q^2}{A} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial \xi}, \\ \frac{q}{h_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \sigma} + W^2 = c^2. \end{cases} \quad (20)$$

где  $q$  - компонента вектора скорости в плоскости  $(x, y)$ , ортогональная сечениям трубок тока.

Граничные условия следующие:

$$\sigma = 1 : W(1) = 0, \quad q(1, \xi) = -1;$$

$$\sigma = 0 : \frac{dW}{d\sigma} = 0, \quad q(0, \xi) = 0;$$

$$W(0) = c.$$

Поскольку  $W = W(\sigma)$ , т.е. линии

уровня  $W$ -компоненты вектора скорости в конкретном сечении канала совпадают с линиями уровня координаты  $\sigma = const$ , то можно показать, что поперечная  $q$ -компонента вектора скорости также зависит лишь от  $\sigma$  и  $p_1 = p_1(\sigma)$ .

Тогда из третьего уравнения системы (20) следует:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \xi} = 0 \rightarrow \frac{\partial h_1}{\partial \xi} = 0.$$

Следовательно,  $h_1 = h_1(\sigma)$ . Из второго уравнения системы (20) получим:

$$\frac{dp_1}{d\sigma} = -q \frac{dq}{d\sigma} = -\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{q^2}{2} \right).$$

Отсюда следует, что:

$$p_1 = -\frac{q^2}{2} + const.$$

Таким образом, если известна функция  $\sigma = \sigma(x, y)$  и известна кинематика потока, в виде зависимостей  $q = q(x, y)$ ,  $W = W(x, y)$ , то становится известна также зависимость  $p_1 = p_1(x, y)$ . Итак, система (20) разделилась на две системы. Формальное решение одной из них в виде связи между  $p$  и  $q$  описано выше. Вторая система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} (h_2 q) + W = 0, \\ \frac{q}{h_1} \cdot \frac{\partial W}{\partial \sigma} + W^2 = c^2. \end{cases}$$

Рассмотрим ее возможное решение.

Так как  $h_1 h_2 = A = const$ , то

$$h_2 = h_2(\sigma) = \frac{A}{h_1(\sigma)}. \text{ Поэтому}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{q}{h_1}\right)' + W = 0, \\ \frac{q}{h_1} \cdot W' = c^2 - W^2, \end{cases}$$

где  $c = W_{max}$ , дифференцирование производится по переменной  $\sigma$ .

Обозначим

$$\frac{q}{c} = g, \quad \frac{W}{c} = f.$$

Определив  $h_1$  можно записать выражение для второго коэффициента Ламе:

$$h_2(\sigma) = \frac{A}{h_1(\sigma)} = \frac{A \cdot \Pi(\sigma)}{F_0}.$$

Рассмотрев баланс расхода для всего канала, можно убедиться, что параметр  $A$  определяется соотношением

$$A = \frac{F_0}{\Pi_0}.$$

В результате получено автомодельное решение, содержащее обобщенную константу  $c = \pi \Pi_0 / (2F_0)$ .

Зная общую структуру течения жидкой среды можно определить, например, расходные характеристики для различных каналов, а также перепад давления вдоль канала. При известной зависимости  $\sigma = \sigma(x, y)$  может быть описана и детальная структура течения. Рассмотрим известные решения с точки зрения изложенной теории.

Известно, что для плоского течения компоненты вектора скорости в безразмерном виде выражаются формулами (4), тогда

$$W = \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi y}{2H}, \quad q = -\sin \frac{\pi y}{2H}.$$

$$F_0 = 1, \quad \Pi_0 = \Pi = 1, \quad \sigma = \frac{y}{H} = y,$$

$$\xi = \frac{x}{H} = x.$$

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2} = 1,$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$h_1 h_2 = 1 = const = A.$$

Итак,

$$h_1 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{F_0}{\Pi}, \quad h_2 = 1 = \frac{\Pi}{\Pi_0},$$

$$h_1 h_2 = 1 = \frac{F_0}{\Pi_0}.$$

Таким образом, это частное решение удовлетворяет общему.

Для осесимметричного течения

$$W = \pi \cdot \cos \frac{\pi}{2} r^2, \quad q = -\frac{1}{r} \sin \frac{\pi}{2} r^2,$$

$$F_0 = \pi, \quad \Pi_0 = 2\pi, \quad \Pi = 2\pi r,$$

$$\sigma = r^2, \quad \xi = \varphi,$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \varphi, \end{cases}$$

$$h_1 = \frac{1}{2\sqrt{\sigma}} = \frac{1}{2r} = \frac{\pi}{2\pi r} = \frac{F_0}{\Pi},$$

$$h_2 = r = \frac{2\pi r}{2\pi} = \frac{\Pi}{2\pi},$$

$$h_1 h_2 = \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{F_0}{\Pi_0} = const.$$

Следовательно, это частное решение также удовлетворяет общему решению.

При осесимметричном кольцевом течении известно, что

$$W = \frac{1}{1 - R_1^2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \sigma,$$

$$q = -\frac{1}{r} \sin \frac{\pi}{2} \sigma.$$

$$F_0 = \pi(1 - R_1^2), \quad \Pi_0 = 2\pi, \quad \Pi = 2\pi r,$$

$$\sigma = \frac{r^2 - R_1^2}{1 - R_1^2}, \quad \xi = \varphi,$$

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \varphi, \\ y = r \cdot \sin \varphi. \end{cases}$$

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2} = \frac{\partial r}{\partial \sigma},$$

а поскольку

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = \frac{2r}{1 - R_1^2},$$

то

$$h_1 = \frac{1 - R_1^2}{2r} \text{ и}$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2} = r.$$

Следовательно:

$$h_1 h_2 = \frac{1 - R_1^2}{2} = \text{const} = A.$$

Итак,

$$h_1 = \frac{1 - R_1^2}{2r} = \frac{\pi(1 - R_1^2)}{2\pi r} = \frac{F_0}{\Pi},$$

$$h_2 = r = \frac{2\pi r}{2\pi} = \frac{\Pi}{2\pi},$$

$$h_1 h_2 = \frac{1 - R_1^2}{2} = \frac{\pi(1 - R_1^2)}{2\pi} = \frac{F_0}{\Pi_0} = \text{const}$$

Таким образом, это частное решение также удовлетворяет общему решению.

Рассмотрим случай течений с большой вязкостью, то есть  $Re_0 \rightarrow 0$ . Пусть  $Re_0 \equiv \varepsilon \ll 1$ . Тогда, умножив обе части второго уравнения системы (10) на  $\varepsilon$ , получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + W = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \\ \varepsilon \left( u \frac{\partial W}{\partial x} + v \frac{\partial W}{\partial y} + W^2 \right) + \varepsilon \frac{\partial p}{\partial z} = \\ = z \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right). \end{cases} \quad (21)$$

Второе и третье уравнение этой системы зависят лишь от  $x$  и  $y$ , поэтому для распределения давления можно предложить зависимость

$$p = p_0 - \frac{1}{2} c^2 z^2 + p_1(x, y) \cdot \frac{1}{\varepsilon}. \quad (22)$$

Продифференцировав (22) по  $x$ ,  $y$  и  $z$ , и умножив полученные выражения на  $\varepsilon$ , получим:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p_1}{\partial y}, \\ \varepsilon \frac{\partial p}{\partial z} = -\varepsilon c^2 z. \end{cases} \quad (23)$$

Подставив (23) в (21), получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + W = 0, \\ \varepsilon \left( u \frac{\partial W}{\partial x} + v \frac{\partial W}{\partial y} + W^2 - c^2 \right) = \\ = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{cases} \quad (25)$$

Запишем оператор Лапласа  $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$  в обобщенных

координатах, полагая, что справедливы зависимости, полученные для случая коэффициента динамической вязкости  $\mu = 0$ .

Учитывая, что

$$h_1 = h_1(\sigma), \quad h_2 = h_2(\sigma), \quad h_3 = 1,$$

получим:

$$\Delta w = \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + \left( h_1 h_2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right\}. \quad (26)$$

Поскольку

$$w = zW(\sigma),$$

то

$$\frac{\partial w}{\partial z} = W(\sigma), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0.$$

Подставив эти соотношения в (26), получим

$$\Delta w = \frac{z}{h_1 h_2} \cdot \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{dW}{d\sigma} \right). \quad (27)$$

Далее, учитывая, что

$$u \frac{\partial W}{\partial x} + v \frac{\partial W}{\partial y} = F(\sigma, \xi) = \frac{q}{h_1} \cdot \frac{dW}{d\sigma}$$

и  $h_1 h_2 = \frac{F_0}{P_0} = A = const$ , подставим вы-

ражение (27) во второе уравнение (24) и, преобразовав его, получим следующее нелинейное уравнение для определения обобщенной константы  $C$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Pi(\sigma)}{F_0} \cdot q \cdot W' + W^2 - c^2 &= \\ &= \frac{1}{\varepsilon F_0^2} \cdot \left( \Pi^2(\sigma) \cdot W' \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Для плоского случая  $F_0 = 1$  и  $\Pi = 1$ , уравнение (28) примет вид:

$$\varepsilon(q \cdot W' + W^2 - c^2) = W''.$$

Для осесимметричного случая  $F_0 = \pi$  и  $\Pi = 2\pi r$ , тогда из (28) получим:

$$\varepsilon(2rq \cdot W' + W^2 - c^2) = 4r^2 W''.$$

При анализе системы (24) получено нелинейное дифференциальное уравнение, которое может быть исследовано с помощью алгоритма [5] или методом, изложенным в [6]. Получены решения, на основе которых можно исследовать структуру течения, определив зависимость  $\sigma = \sigma(x, y)$ .

Исследованы трехмерные течения в каналах фильтрационных установок на основе уравнений гидродинамики. На основе сравнения искомого решения с известными двумерными введены обобщенные координаты  $(\sigma, \xi, z)$ , где  $\sigma$  - аналог площади канала,  $\xi$  - безразмерный периметр - аналог координаты  $x$  в плоском случае или угла  $\varphi$  в осесимметричном. В случае предельно высоких значений числа Рейнольдса получено автомодельное решение. Для случая предельно низких значений числа Рейнольдса получено нелинейное дифференциальное уравнение.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Светлов С.А., Александров М.В. Исследование фильтра-сгустителя непрерывного действия // Тез. докл. II Всес. научно-техн. конф. по гидромеханическим процессам разделения неоднородных смесей. - М.: ЦИНТИХИМНЕФТЕМАШ, 1983. - С. 35.
2. Berman A.S. Laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. 1953. V.24, N9. - P. 1232-1235.
3. Yuan S.W., Finkelstein A.B. Laminar Pipe Flow With Injection and Suction Through a Porous Walls // Trans. A.S.M.E. J. of heat transfer. 1956. V.78, N4. - P. 719-724.
4. Бобрышев В.П., Лисица В.Д., Спиридонов Ф.Ф. Физико-математическое моделирование внутрикамерной газодинамики РДТТ. М.: ЦНИИИТИ КПК, 1993. - 128 с.
5. Регирер С.А. О приближенной теории течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах с проницаемыми стенками // Журнал технической физики. 1960. Т.30, В.6. - С. 639-643.
6. Morduchow M. On Laminar Flow Through a Channel or Tube with Injection: Application of Averages // Quart. Appl. Math. 1956. V. 14, N 4. - P. 361-368.



