НЕСТАЦИОНАРНЫЙ РАДИАЦИОННО-КОНДУКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В ПОЛУПРОЗРАЧНОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ РАССЕЯНИЯ

А.Л. Бурка, Е.В. Великанов

В работе рассматривается численное решение краевой задачи для радиационно-кондуктивного теплообмена (РКТ) в слое селективно-поглощающей, излучающей и рассеивающей среды.

Проблема совместного переноса тепла теплопроводностью и излучением в настоящее время актуальна во многих практических задачах, в частности при исследовании процесса нагрева и охлаждения стекол, пластмасс, кристаллов.

Спектральный коэффициент объемного поглощения при температуре T=300 K рассчитывался по экспериментально измеренному спектру пропускания оргстекла [1].

Краевая задача для уравнения энергии в безразмерном виде записывается следующим образом:

$$\rho c_p L^2 \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\Lambda \frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right) - \frac{L}{T_*}\frac{\partial E}{\partial \xi}, \; 0 < \xi < 1, \tau > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\alpha_0 L}{\Lambda}(\theta - \theta_0) - \frac{L}{\Lambda T_*}\int_{\Omega_0} \varepsilon_{\lambda 0}[Q_{\lambda 0}(\theta_1^*) - E_{\lambda 0}(\theta)]d\lambda, \; \xi = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\alpha_1 L}{\Lambda}(\theta_1 - \theta) - \frac{L}{\Lambda T_*}\int_{\Omega_1} \varepsilon_{\lambda 1}[Q_{\lambda 1}(\theta_1^*) - E_{\lambda 1}(\theta)]d\lambda, \; \xi = 1, \quad (3)$$

$$\theta(\xi,0) = \theta_0(\xi). \quad (4)$$

Система уравнений переноса для прямой и обратной интенсивностей записываются

$$\mu \frac{dI_\lambda^+}{dx} + \beta_\lambda I_\lambda^+ = \kappa_\lambda I_{\lambda b}(T) + \frac{\sigma_\lambda}{2}\int_{\mu'=0}^{1}\left(p(\mu,\mu')I_\lambda^+(x,\mu') + p(\mu,-\mu')I_\lambda^-(x,-\mu')\right)d\mu', \quad (5)$$

$$\mu \frac{dI_\lambda^-}{dx} - \beta_\lambda I_\lambda^- = -\kappa_\lambda I_{\lambda b}(T) - \frac{\sigma_\lambda}{2}\int_{\mu'=0}^{1}\left(p(-\mu,\mu')I_\lambda^+(x,\mu') + p(-\mu,-\mu')I_\lambda^-(x,-\mu')\right)d\mu',$$

$$0<x<L$$

$$I_\lambda^+(0,\mu) = (1 - R_{\lambda 0})I_{p\lambda}(T_0) + R_{\lambda 0}I_\lambda^-(0,-\mu),$$
$$I_\lambda^-(L,-\mu) = (1 - R_{\lambda 1})I_{p\lambda}(T_1) + R_{\lambda 1}I_\lambda^+(L,\mu), \quad (6)$$

Здесь $E_{\lambda i} = I_{\lambda b}(T_i)$; $\mu = |\cos\varphi|$, φ – угол между лучом и положительным направлением оси x, $0 \le \mu \le 1$; $I_{\lambda b}(T) = \dfrac{2hc_0^2}{n^2\lambda^5\left[\exp(hc_0/(n\lambda kT)) - 1\right]}$;

κ_λ –спектральный коэффициент объемного поглощения материала для частоты λ, σ_λ – спектральный коэффициент объемного рассеяния; β_λ – спектральный коэффициент ослабления ($\beta_\lambda = \kappa_\lambda + \sigma_\lambda$), p – сферическая индикатрисса рассеяния, n – показатель преломления; c_p – удельная теплоемкость; ρ – плотность среды; Λ – коэффициент теплопроводности; L – толщина слоя; T_i, T_i^* – температуры внешней среды и внешних излучателей; $I_\lambda^\pm$ – спектральные интенсивности излучения в положительном и отрицательном направлениях оси x; $I_{\lambda b}(T)$ – функция Планка; $Q_{\lambda i}$ – плотности падающих потоков; $E_{\lambda i}$ – плотности собственного излучения; $\varepsilon_{\lambda i}$ – степени черноты; $R_{\lambda i}$ – коэффициенты отражения; Ω_i – спектральные области непрозрачности граничных поверхностей; α_i – коэффициенты конвективной теплоотдачи на границах; i=0, 1.

Используя замену $U = \int_0^\theta \Lambda(\theta)dz$

задача перепишется в виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - U = F(\theta),$$

где $F(\theta) = \dfrac{L}{T_*}\dfrac{\partial E}{\partial \xi} + R\dfrac{\partial \theta}{\partial \tau} - \int_0^\theta \Lambda(\theta)dz,$

с использованием функции Грина

$$G(\xi,z) = \begin{cases} -ch(1-\xi)ch(z)/sh(1), & 0 \le z \le \xi \\ -ch(\xi)ch(1-z)/sh(1), & \xi \le z \le 1, \end{cases}$$

являющейся решением однородной краевой задачи [2].

$$\frac{\partial^2 G(\xi,z)}{\partial z^2} - G(\xi,z) = \delta(\xi,z), \quad 0 \le \xi, z \le 1;$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0,\ z = 0;$$
$$\frac{\partial G}{\partial z} = 0,\ z = 1;$$

где $\delta(\xi, z)$ – функция Дирака; начально-краевая задача (1)-(4) сводится к нелинейному интегральному уравнению относительно искомой безразмерной температуры $\theta(\xi,\tau)$, которое имеет вид

$$\int\limits_0^{\theta} \Lambda(\theta)dz = q_0 G(\xi,0) - q_1 G(\xi,1) + \int\limits_0^1 F(\theta,z,t)G(\xi,z)dz \quad (7)$$

здесь $q_0 = \dfrac{\alpha_0 L}{\Lambda}(\theta(0,\tau) - \theta_0) -$
$$- \omega \int\limits_{\Omega_0} \varepsilon_{\lambda 0}[Q_{\lambda 0}(\theta_0^*) - E_{\lambda 0}(\theta)]d\nu,$$

$$q_1 = \frac{\alpha_1 L}{\Lambda}(\theta_1 - \theta(1,\tau)) +$$
$$+ \omega \int\limits_{\Omega_1} \varepsilon_{\lambda 1}[Q_{\lambda 1}(\theta_1^*) - E_{\lambda 1}(\theta)]d\nu,$$

$\theta(\xi,t)=T(\xi,t)/T_*$; $\theta_i^*=T_i^*/T_*$; $G(\xi,0)$=-ch(1-ξ)/sh(1); $G(\xi,1)$=-ch(ξ)/sh(1); $\xi=x/L$; $\theta_i=T_i/T_*$; $\omega=L/(\Lambda T_*)$; $R=L^2\rho c_p$; $i=0,\ 1$;
T_* – характерная температура.

Интенсивности излучения, которые определяются из решения краевой задачи (5), (6) для уравнения переноса излучения, имеют вид:

$$I_\lambda^+(\xi,\mu) = \left[I_\lambda^+(0,\mu) + \frac{\kappa_\lambda L}{\mu}\int\limits_0^{\xi} e^{\frac{\beta_\lambda L}{\mu}y} I_{\lambda b}(T)dy + \right.$$
$$\left. + \frac{\sigma_\lambda}{2}\frac{L}{\mu}\int\limits_{y=0}^{\xi} e^{\frac{\beta_\lambda L}{\mu}y} \int\limits_{\mu'=-1}^{1} p(\mu_0)I_\lambda(y,\mu')d\mu' dy \right]\cdot e^{-\frac{\beta_\lambda L}{\mu}},$$
$$I_\lambda^-(\xi,-\mu) = \left[I_\lambda^-(1,-\mu) + \frac{\kappa_\lambda L}{\mu}\int\limits_{\xi}^{1} e^{-\frac{\beta_\lambda L}{\mu}y} I_{\lambda b}(T)dy + \right. \quad (8)$$
$$\left. + \frac{\sigma_\lambda}{2}\frac{L}{\mu}\int\limits_{y=\xi}^{1} e^{-\frac{\beta_\lambda L}{\mu}y} \int\limits_{\mu'=-1}^{1} p(\mu_0)I_\lambda(y,\mu')d\mu' dy \right]\cdot e^{\frac{\beta_\lambda L}{\mu}}.$$

С использованием соотношений (6), (8) из решения системы алгебраических уравнений определяются граничные значения интенсивностей

$$I_\lambda^+(0,\mu) = \left\{ \varepsilon_{0\lambda} I_{\lambda b}(0) + R_{\lambda 0}\varepsilon_{\lambda 1} I_{\lambda b}(1) e^{-\frac{\beta_\lambda L}{\mu}} + \right.$$
$$+ \frac{\kappa_\lambda L}{\mu}\int\limits_0^1 I_{p\nu}(z)\left[R_{\lambda 0} e^{-\frac{\beta_\lambda L}{\mu}z} + R_{\lambda 0}R_{\lambda 1} e^{-\frac{\beta_\lambda L}{\mu}(2-z)} \right]dz +$$
$$+ \frac{\sigma_\lambda L}{2\mu}\left(R_{\lambda 0}\int\limits_{z=0}^{1} e^{-\frac{\beta_\lambda L}{\mu}z} \int\limits_{\mu'=-1}^{1} p(\mu_0)I_\lambda(z,\mu')d\mu' dz + \right. ,$$
$$\left.\left. + R_{\lambda 0}R_{\lambda 1}\int\limits_{z=0}^{1} e^{-\frac{\beta_\lambda L}{\mu}(2-z)} \int\limits_{\mu'=-1}^{1} p(\mu_0)I_\lambda(z,\mu')d\mu' dz \right) \right\} / D,$$

$$I_\lambda^-(1,-\mu) = \left\{ \varepsilon_{1\lambda} I_{\lambda b}(1) + R_{\lambda 1}\varepsilon_{\lambda 0} I_{\lambda b}(0) e^{-\frac{\beta_\lambda L}{\mu}} + \right.$$
$$+ \frac{\kappa_\lambda L}{\mu}\int\limits_0^1 I_{\lambda b}(z)\left[R_{\lambda 1} e^{-\frac{\beta_\lambda L}{\mu}(1-z)} + R_{\lambda 0}R_{\lambda 1} e^{-\frac{\beta_\lambda L}{\mu}(1+z)} \right]dz +$$
$$+ \frac{\sigma_\lambda L}{2\mu}\left(R_{\lambda 1}\int\limits_{z=0}^{1} e^{-\frac{\beta_\lambda L}{\mu}(1-z)} \int\limits_{\mu'=-1}^{1} p(\mu_0)I_\lambda(z,\mu')d\mu' dz + \right.$$
$$\left.\left. + R_{\lambda 0}R_{\lambda 1}\int\limits_{z=0}^{1} e^{-\frac{\beta_\lambda L}{\mu}(z+1)} \int\limits_{\mu'=-1}^{1} p(\mu_0)I_\lambda(z,\mu')d\mu' dz \right) \right\} / D,$$

где $\varepsilon_{\lambda 0}=1-R_{\lambda 0}$; $\varepsilon_{\lambda 1}=1-R_{\lambda 1}$; $D=1-R_{\lambda 0}R_{\lambda 1}\exp(2\beta_\lambda L/\mu)$.

В [3] показано, что $\dfrac{\partial E}{\partial z} = \int\limits_0^{\infty} \tau_\lambda [4 I_{\lambda b}(z) - G_\lambda(z)]d\lambda$,

где $G_\lambda(z) = 2\pi \int\limits_{\mu=0}^{1} (I_\lambda^+(z,\mu) + I_\lambda^-(z,-\mu))d\mu$.

Таким образом, задача о РКТ (1)-(6) в плоском слое селективно-поглощающей, излучающей и рассеивающей среды сводится к решению итерационным методом [4] нелинейного интегрального уравнения (7) относительно искомой безразмерной температуры $\theta(\xi,\tau)$.

Интегралы (7), (8) вычислялись по квадратурным формулам Гаусса с 20 узлами, производная $\partial\theta/\partial\tau$ аппроксимировалась конечно-разностным отношением.

Прямая и обратная составляющая интенсивности излучения находились поточечным последовательным методом Гаусса-Зейделя.

Для каждого момента времени рассчитывался профиль температуры.

Численные расчеты, для модельной задачи, проводились при следующих теплофизических и оптических характеристиках: $T_н$=293 K; Λ – переменная при этом интервалу T =91,91 — 674,02 (K) соответствовал Λ =0,64 — 1,79 (Вт(м^2*K)); $c_p=1{,}73\cdot 10^3$ Дж/(кг·K); $\rho=1{,}1\cdot 10^3$ кг/м^3, T_*=403 K, n=1,5.

По формулам, приведенным в работе [6], рассчитаны коэффициент теплоотдачи α_0 и температура внешней среды T_0, которые изменяется следующим образом: в интервале 1000 — 1350 сек. значения температуры монотонно возрастает от 5 до 130 С^0, а в интервале 1350 — 1800 сек, 130 С^0.

На границе T_1=293 K, α_1=5 Вт/(м^2·K). Внутри слоя учитывалось переизлучение, а на его поверхностях — собственное излучение и конвективные потоки тепла. При этом граничные условия (2), (3) принимают вид

$$\Lambda\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_0(T - T_0) + \int\limits_{\Omega_0} \varepsilon_{\lambda 0} E_{\lambda 0}(T) d\lambda \qquad x=0$$

$$\Lambda\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha_1(T_1 - T) - \int\limits_{\Omega_1} \varepsilon_{\lambda 1} E_{\lambda 1}(T) d\lambda. \qquad x=L$$

В результате численного счета были получены следующие результаты.

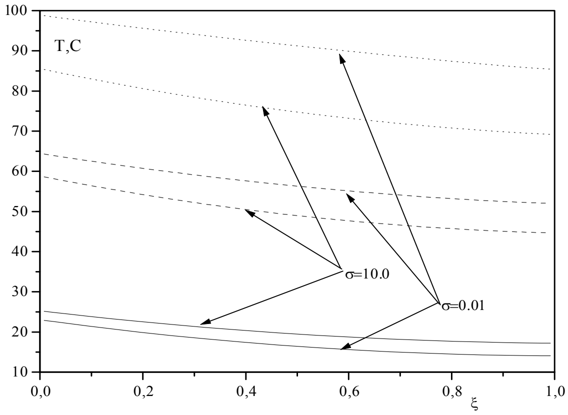

Рис.1

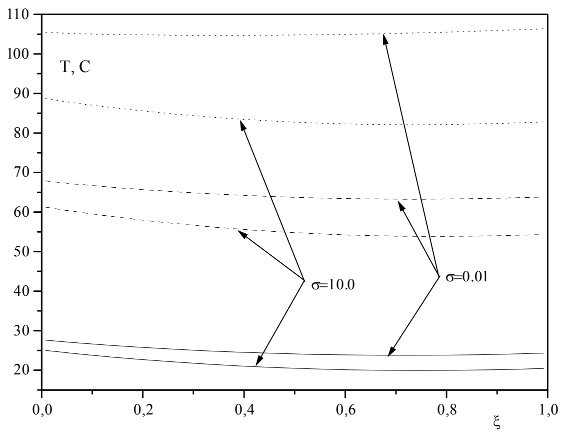

Рис.2

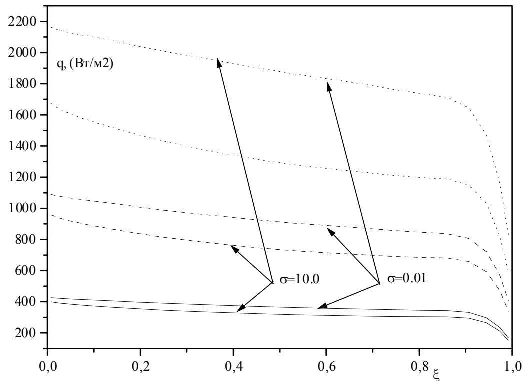

Рис.3

На рис.1 и рис.2 представлены температурные распределения, где указаны спектральные коэффициенты объемного рассеяния (индекс λ не прописан), при этом на всех трех графиках сплошные линии — 1000 сек. от начала нагрева, штриховые — 1200 сек., пунктирная — 1800 сек. При этом на рис.1 $R_{\lambda 0}$=0, $R_{\lambda 1}$=1, на рис.2 $R_{\lambda 0}$=1, $R_{\lambda 1}$=0.

На рис.3 результирующие потоки излучения и $R_{\lambda 0}$=0, $R_{\lambda 1}$=1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурка А.Л., Рубцов Н.А., Ступнин В.П. Теоретическое и экспериментальное исследование режимов нагрева органического стекла // Материалы VI Всесоюз. конф. по тепломассообмену «Тепломассообмен-VI». Минск: Ин-т тепло- и массообмена, 1980. -Т.2. -С. 132-137.

2. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

3. Оцисик М.Н. Сложный теплообмен. М.: Мир, 1976

4. Канторович Л.В. О методе Ньютона // Тр. / АН СССР. Мат. ин-т. 1949. -Т. 28. -С. 135-139.

5. Tauton M.A. Engineering problems associated with supersonic transport aircraft // Aircraft Engng., 1963. -V. 35, N 11. -P. 326-336.

6. Авдуевский В.С., Галицейский Б.М., Глебов Г.А. и др. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М.: Машиностроение, 1975.