

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ПАССИВНЫХ СИСТЕМАХ СОЛНЕЧНОГО ОТОПЛЕНИЯ

В.Я. Федянин

Опыт зарубежных стран показывает, что существенное улучшение качества теплоснабжения может быть достигнуто за счет использования пассивных систем солнечного отопления [1]. Такие системы экологически безопасны и конкурентно способны по сравнению с традиционным отоплением.

Под пассивными системами солнечного отопления понимают такие системы, в которых поглощение и аккумулирование тепла осуществляются самими строительными элементами здания, а распределение тепла в отапливаемом объекте происходит естественным путем. Этим они отличаются от так называемых активных систем, использующих специальное гелиотехническое и инженерное оборудование (солнечные коллекторы, аккумулирующие емкости и т.п.).

Стены здания могут быть спроектированы как пассивные солнечные коллекторы путем размещения в них средств для по-

глощения солнечной радиации (рис. 1). Стены, сочетающие хорошие теплоизоляционные свойства с функциями солнечных коллекторов, могут существенно снизить тепловую нагрузку здания. Использование пассивных систем влияет на улучшение внутреннего климата, позволяет снизить температуру внутреннего воздуха и увеличить зоны комфорта в помещениях. В зданиях с пассивными системами с минимальными затратами можно экономить значительную часть топлива, затрачиваемого на отопление.

Для определения параметров, влияющих на эффективность преобразования солнечной радиации в тепловую энергию, рассмотрим математическую модель процесса распределения потоков тепла в системе. На рис.1: T_v – температура наружного воздуха, T_p – температура воздуха внутри здания, T_a – температура абсорбера.

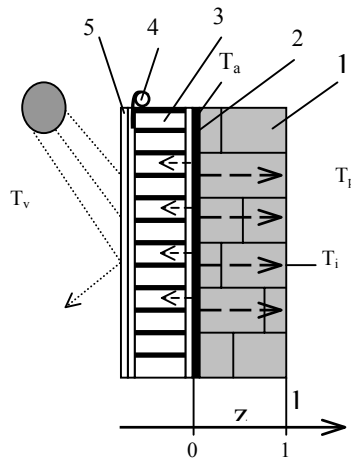


Рис. 1. Схема стены здания с установленным элементом пассивной системы солнечного отопления: 1 – стена здания, 2 – абсорбирующий слой, 3 – прозрачная изоляция, 4 – регулирующий элемент (жалюзи), 5 – стекло

Пространственно-временное распределение температуры в стене в одномерном приближении описывается нестационарным уравнением теплопереноса:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \quad (1)$$

Начальные условия:

$$\Theta(\tau_1, z) = \Theta_n(z) \quad (2)$$

Граничные условия:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = -q(\tau) + Bi_a [\Theta(\tau, 0) - \Theta_v(\tau)]; \quad (3^a)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=1} = -Bi_i [\Theta(\tau, 1) - \Theta_p(\tau)]. \quad (3^b)$$

В формулах (1) ÷ (3) использованы следующие безразмерные параметры и переменные:

$$z = \frac{x}{l}, \Theta = \frac{T}{T_0}, \Theta_v = \frac{T_v}{T_0}, \Theta_p = \frac{T_p}{T_0},$$

$$\tau \equiv Fo = \frac{t}{\tau_0}, \tau_0 = \frac{l^2}{a}, Bi_i = \frac{\alpha_i l}{\lambda_w}, \quad (4)$$

$$Bi_a = \frac{k_s l}{\lambda_w}, q = \frac{g_s E_{90} l}{\lambda_w T_0}.$$

Здесь l – толщина стены (м), T_0 – расчетная температура внутреннего воздуха помещений ($^{\circ}\text{C}$), λ и a – коэффициенты теплопроводности и температуропроводности материала стены, соответственно ($\text{Вт/м}^{\circ}\text{C}$), ($\text{м}^2/\text{с}$), Fo – критерий Фурье, τ_0 – характерное время изменения температуры (с), α_i – коэффициент теплоотдачи внутренней поверхности стены ($\text{Вт/м}^2\text{C}$), k_s – коэффициент теплопередачи прозрачной теплоизоляции ($\text{Вт/м}^2\text{C}$), g_s – коэффициент проникновения солнечной радиации через прозрачную теплоизоляцию (оптический КПД), E_{90} – плотность потока солнечной радиации на вертикальную поверхность (Вт/м^2).

Решение линейного уравнения теплопереноса (1) с неоднородными граничными условиями (3^а) и (3^б) будем искать в следующем виде:

$$\Theta(\tau, z) = U(\tau, z) + W(\tau, z), \quad (5)$$

где $U(\tau, z) = g_0(\tau) + g_1(\tau)z$ – линейная функция координаты, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям (3^а), (3^б).

Проведя элементарные алгебраические преобразования, получим выражения для коэффициентов, зависящих от времени – $g_0(\tau)$, $g_1(\tau)$:

$$g_0(\tau) = \frac{Bi_a(1 + Bi_i)\Theta_v^*(\tau) + Bi_i\Theta_p(\tau)}{Bi_a(1 + Bi_i) + Bi_i}, \quad (6^a)$$

$$g_1(\tau) = \frac{Bi_a Bi_i [\Theta_p(\tau) - \Theta_v^*(\tau)]}{Bi_a(1 + Bi_i) + Bi_i}. \quad (6^b)$$

Здесь $\Theta_v^*(\tau) = \Theta_v(\tau) + q(\tau) / Bi_a$.

Функция $W(\tau, z)$ удовлетворяет уравнению теплопереноса с источником объемного тепловыделения и однородным граничным условиям:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{\partial U}{\partial \tau}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=0} = Bi_a W(\tau, 0); \quad (7^a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=1} = -Bi_i W(\tau, 1). \quad (7^b)$$

Начальные условия:

$$W(\tau_1, z) = \Theta_n(z) - U(\tau_1, z). \quad (7^B)$$

Решение дифференциального уравнения (7) с условиями однозначности (7^а)÷(7^б) [2]:

$$W(\tau, z) = \int_0^{\tau} \int_0^1 G(\tau - \xi, z, \delta) \Phi(\xi, \delta) d\xi d\delta + \int_0^1 G(\tau, z, \delta) f(\delta) d\delta, \quad (8)$$

$$\text{где } \Phi(\xi, \delta) \equiv -\frac{\partial U(\xi, \delta)}{\partial \xi},$$

$f(\delta) \equiv \Theta_n(\delta) - U(\delta)$, функция Грина –

$G(\tau, z, \delta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\|\Psi_k\|^2} \Psi_k(z) \Psi_k(\delta) \exp(-\gamma_k^2 \tau)$, собственные функции задачи –

$\Psi_k(z) = \text{Cos}(\gamma_k z) + \frac{Bi_a}{\gamma_k} \text{Sin}(\gamma_k z)$, их модули –

$$\|\Psi_k\|^2 = \frac{Bi_i(\gamma_k^2 + Bi_a^2)}{2\gamma_k^2(\gamma_k^2 + Bi_i^2)} + \frac{Bi_a}{2\gamma_k^2} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{Bi_a^2}{\gamma_k^2}\right).$$

Здесь γ_k – положительные корни трансцендентного уравнения:

$$\frac{\text{tg}(\gamma)}{\gamma} = \frac{Bi_a + Bi_i}{\gamma^2 - Bi_a Bi_i}. \quad (8^a)$$

В соответствии с формулами (3^б), (5) и (7^б) плотность потока тепла на границе «стена – внутренний воздух»:

$$q_i = -\frac{\partial \Theta}{\partial z} \Big|_{z=1} = -g_1 - \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_{z=1} \quad (9)$$

$$= -g_1(\tau) + Bi_i W(\tau, 1).$$

В уравнении (9) принято следующее соглашение о знаках:

(-) – если тепло поступает от внутреннего воздуха к стене;

(+) – если тепло поступает от стены в помещение.

При отсутствии солнечной радиации ($q(\tau) = 0$):

$$q_{i0} = -\frac{\partial \Theta_0}{\partial z} \Big|_{z=1} = -g_{10} - \frac{\partial W_0}{\partial z} \Big|_{z=1} \quad (9^a)$$

$$= -g_{10}(\tau) + Bi_i W_0(\tau, 1).$$

Изменение потока тепла при воздействии солнечной радиации можно представить в следующем виде:

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ
В ПАССИВНЫХ СИСТЕМАХ СОЛНЕЧНОГО ОТОПЛЕНИЯ

$$\Delta q_i = q_i - q_{i0} = \eta_{st} q(\tau) - \int_{\tau_1}^{\tau} \dot{q}(\xi) \epsilon_i(\tau - \xi) d\xi, \quad (10)$$

где

$$\eta_{st} = \frac{Bi_i}{Bi_a(1 + Bi_i) + Bi_i} = \frac{R_s}{R_s + R_w} = \frac{1}{1 + \frac{k_s}{k_w}}. \quad (11)$$

Здесь η_{st} - статическая составляющая теплового КПД системы солнечного отопления, k_w - коэффициент теплопередачи стены.

Выражение (11) для статической составляющей теплового КПД системы солнечного отопления идентично формуле, полученной при квазистатическом рассмотрении процесса [3]. Ядро интегрального оператора:

$$\epsilon_i(\tau - \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \exp[-\gamma_k^2(\tau - \xi)], \quad (12)$$

где $C_k = \frac{Bi_i \Psi_k(1)}{\gamma_k^2 \|\Psi_k\|^2}$ по аналогии с [4] мож-

но интерпретировать как «отклик» системы на дельта - образное изменение первой производной по времени от $q(\tau)$.

Проводя аналогичное рассмотрение, получим следующие формулы для потока тепловых потерь и дополнительного тепла, запасенного в материале стены:

$$Dq_{pot} = (1 - \eta_{st}) q(\Phi) \int_{\Phi}^{\Phi} \dot{q}(o) \epsilon_{pot}(\Phi - o) do, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \Delta Q}{\partial \tau} = \int_{\tau_1}^{\tau} \dot{q}(\xi) \epsilon_{\Delta Q}(\tau - \xi) d\xi, \quad (14)$$

где

$$\epsilon_{pot}(\tau - \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \exp[-\gamma_k^2(\tau - \xi)], \quad (15)$$

$$\epsilon_{\Delta Q}(\tau - \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \exp[-\gamma_k^2(\tau - \xi)], \quad (16)$$

$$B_k = \frac{Bi_a}{\gamma_k^2 \|\Psi_k\|^2}, \quad D_k = \frac{I_0(k)}{\|\Psi_k\|^2},$$

$$I_0(k) = \int_0^1 \Psi_k(z) dz.$$

Коэффициенты трех функций «отклика» связаны между собой: $D_k = B_k + C_k$.

Применяя полученные выше формулы, рассмотрим, как происходит обмен теплом между частями системы пассивного солнечного отопления.

В качестве исходных данных для численных расчетов будем использовать результаты измерений потоков солнечной радиации и тепловых потоков в здании, проведенных в

1994-1995 г.г. сотрудниками Фраунгоферовского института солнечных энергетических систем (ISE) (г.Фрайбург, ФРГ) и переданных нам в ходе реализации российско-германского проекта «Экспериментальный энергоавтономный дом».

Результаты расчетов показывают, что в течение светового дня тепло, образующееся при нагревании абсорбера солнечной радиацией, частично проникает внутрь помещения и может быть полезно использовано. Часть тепла передается окружающему воздуху, а часть запасается внутри стены. Получение «своей части» запасенной в материале стены тепловой энергии внутренним воздухом происходит за промежуток времени намного больше длительности светового дня.

Оценки характерного времени передачи депонированного тепла показывают, что 90% тепловой энергии, запасенной в материале стены, передаются за промежуток времени, который определяется следующим неравенством:

$$\Delta \tau = \tau - \tau_v < \frac{2.3}{\gamma_1^2}, \quad (17)$$

где γ_1 -наименьший положительный корень трансцендентного уравнения (8^a), τ_v - безразмерное время восхода Солнца.

Численный анализ показывает, что отношение потерь запасенного тепла к величине, которая поступает в помещение и может быть использована для замещения отопительной нагрузки, зависит только от отношения сопротивления теплопередачи прозрачной теплоизоляции к сопротивлению стены. Это обстоятельство позволяет уменьшить потери (и тем самым повысить к. п. д.) за счет введения в ночное время дополнительного теплового сопротивления (рис. 1, жалюзи -4).

Абсолютная величина тепловых потерь зависит от температуры абсорбирующего слоя (см. рис.1, п.2), поэтому дополнительный отвод тепла (и понижение температуры абсорбера) также приводит к повышению общей энергетической эффективности системы.

Время запаздывания максимума теплового потока на внутренней поверхности стены определяется критерием Фурье. Зависимость запаздывания от параметров формы дневного импульса солнечной радиации незначительна. На рис.3 представлены результаты расчета времени появления максимума теплового потока для условий отопительного сезона 1994-1995 г.г. За начало отсчета принимался «центр» импульса солнечной радиации, определяемый формулой:

$$t_m = \frac{\int_{t_v}^{t_e} t E_{90}(t) dt}{E_S}, \quad (18)$$

где $E_S = \int_{t_v}^{t_e} E_{90}(t) dt$ - суточная сумма солнечной радиации (Дж/м²), t_v , t_e - время

восхода и заката, соответственно (с). Результаты расчета, представленные на рис.3, соответствуют характерному времени $\tau_0 \approx 33,6$ час. Расчеты показывают (рис.3), что 74,12% исследованных случаев ($t_{max}-t_m$) находятся в интервале $8,5 \pm 0,5$ час., что хорошо согласуется с результатами измерений.

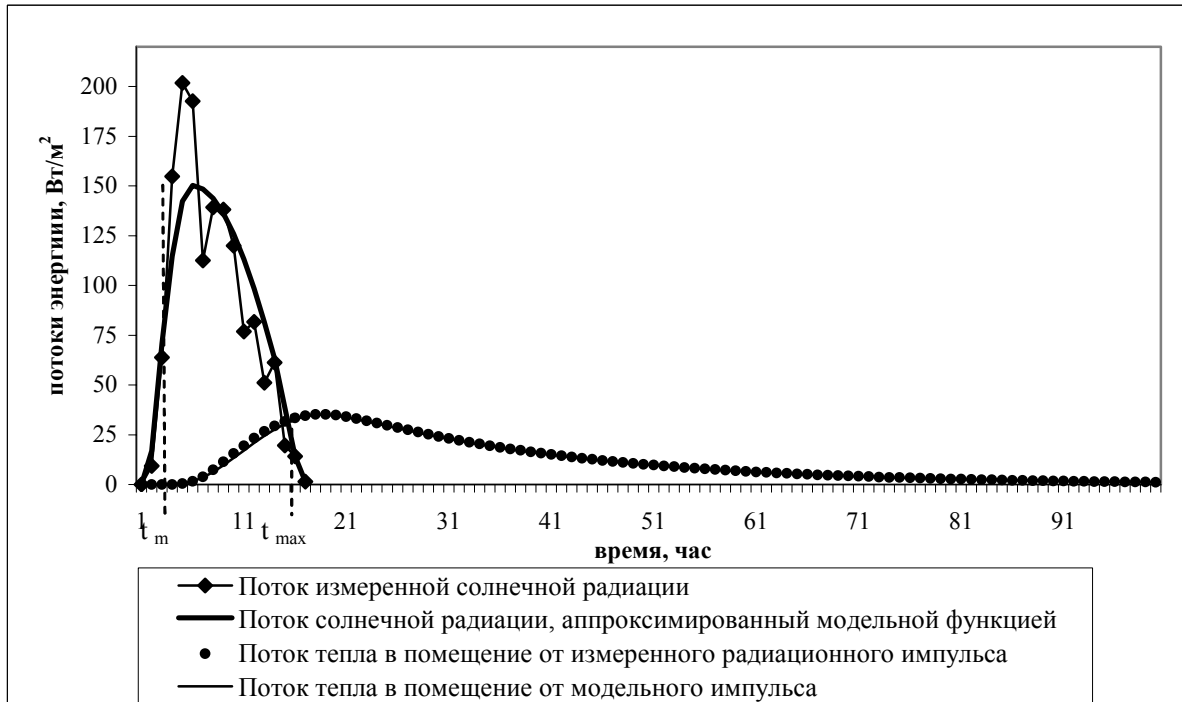


Рис. 2. Поступление тепла в помещение за счет солнечной радиации

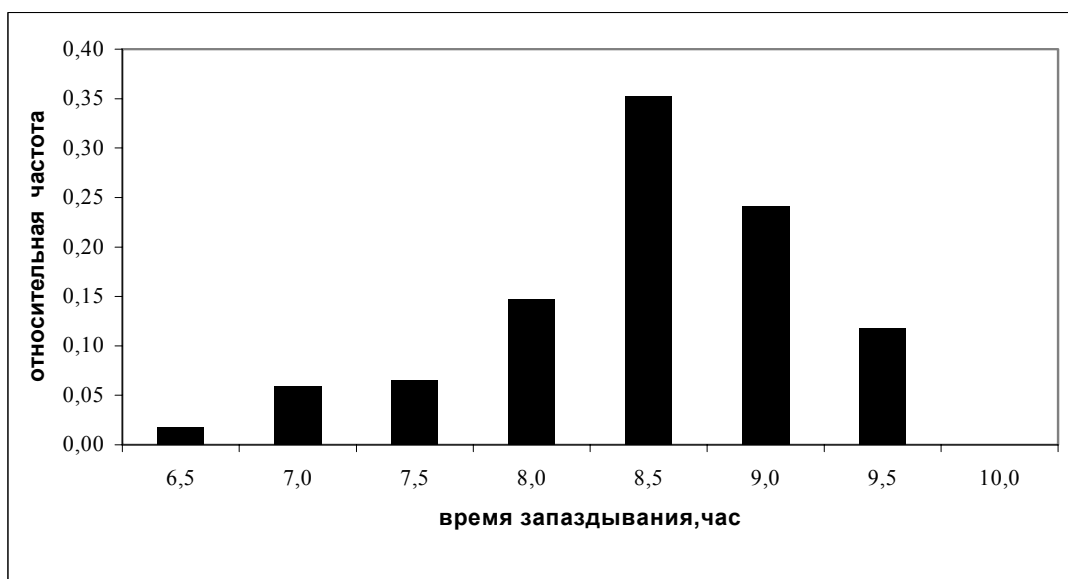


Рис. 3. Относительная частота времени запаздывания максимума потока тепла, поступающего в помещение

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ В ПАССИВНЫХ СИСТЕМАХ СОЛНЕЧНОГО ОТОПЛЕНИЯ

Для приближенных инженерных расчетов динамических характеристик тепловых потоков можно использовать модельную функцию, описывающую временные изменения потока солнечной радиации:

$$\begin{aligned} t_v \leq t \leq t_m \quad E_{90} &= A \sin \omega_1 (t - t_v); \\ t_m \leq t \leq t_e \quad E_{90} &= A \sin \omega_2 (t - t_k). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $A = E_s \frac{\omega_1 \omega_2}{(\omega_1 + \omega_2)}$, $\omega_1 = \frac{\pi}{2(t_m - t_v)}$,

$$\omega_2 = \frac{\pi}{2(t_m - t_e)}, \quad t_k = 2t_m - t_e.$$

Графики, представленные на рис.2, показывают, что замена действующего дневного импульса солнечной радиации сложной формы модельной функцией (19) практически не оказывает влияния на расчетные характеристики тепловых потоков в конструкции здания.

Подставив модельную функцию (19) в формулы (10), (13) и (14), после интегрирования можно получить компактные формулы, удобные для инженерных расчетов.

Учитывая простоту и эффективность систем пассивного солнечного отопления, в ближайшее время и в России можно ожидать появление на рынке различных типов управляемой теплоизоляции и регулирующих устройств (ставни, специальные занавеси или селективные пленки), что сделает актуальными проектирование таких систем и расчет их параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Marko, Achim: Thermische Solarenergienutzung an Gebäuden /Achim Marko; Peter Braun – Berlin;Heidelberg; New York: Springer, 1997. 438 с.
2. Полянин А.Д., Вязьмин А.Ф., Журов А.И., Казенин Д.А. Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса. М.: Изд-во Факториал, 1998. 368 с.
3. A. Goetzberger, V. Wittwer Sonnenenergie: physikalische Grundlagen und thermische Anwendungen. – Stuttgart: Teubner, 1993. 231 с.
4. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Изд-во Наука, 1967. 684 с.