

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕКУЧЕСТИ ДЛЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А.В. Налимов

Проведен анализ работ, посвященных жесткопластическим трехслойным цилиндрическим оболочкам. Доказано, что в рамках гипотез Кирхгофа-Лява решения существуют только для ограниченного диапазона геометрических параметров.

Для построения решений при других геометрических параметрах предлагается способ аппроксимации поверхности текучести. Показано, что такие аппроксимации позволяют строить решения в квадратурах. Путем соответствующего выбора коэффициентов аппроксимирующих поверхностей оценки предельной нагрузки вычисляются с любой заданной точностью. Показано, что экстремальные теоремы предельного анализа не выполняются при реализации различных механизмов течения.

В механике конструкций существует несколько хорошо разработанных областей, например, теория упругости, пластичности, ползучести, трещин и т.д. В рамках этих моделей построены определяющие уравнения для элементов конструкций различных геометрических форм и внешних воздействиях. Для каждой из моделей сформулированы полные системы уравнений, но практически только в рамках теории упругости разработаны САЕ системы [1], позволяющие строить решения для конструкций любых форм. Это связано с тем, что системы разрешающих уравнений теории пластичности, ползучести и трещин достаточно сложны, а для решения каждого типа задач необходимы индивидуальные подходы. Поэтому обычно при решении задач используются некоторые предположения. Например, в случае жесткопластических оболочек принимают справедливость гипотез Кирхгофа – Лява, что позволяет понизить размерность задачи, но при этом увеличивается число переменных. В общем случае поверхность текучести в пространстве обобщенных напряжений $N_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ образована пересечением гиперповерхностей [2]. Соотношения, связывающие обобщенные напряжения и скорости деформаций в предельном состоянии определяется в соответствии с ассоциированным законом течения [2].

В пределах пролета оболочки возможны реализации пластических и жестких областей, границы которых заранее не известны. В каждой из пластических областей выполняется некоторый набор пластических режимов, отвечающих различным кускам поверхности текучести. Таким образом, задачи предельного анализа сводятся к решению многоточечных краевых задач для некоторого на-

бора $\hat{a} = (a_1, \dots, a_L)$ систем нелинейных дифференциально – алгебраических уравнений, где $a_i \in A$, $(i = \overline{1, L})$; A – дискретное множество и $|A| = c_1 n + c_2$ ($c_i = \text{const}$ и n – число сторон многоугольника пластичности). Сложность этих задач заключается в том, что неизвестными являются набор систем уравнений \hat{a} , границы их определения, а также границы пластических областей [2]. Кроме этого обобщенные напряжения и скорости являются кусочно-непрерывными функциями [3].

В силу ограниченности ресурсов вычислительной техники и сложности разрешающих уравнений в 60-е годы были предложены различные методы упрощения задачи. Один из основных таких методов основан на упрощении поверхности текучести, например [4], где пренебрегается влиянием напряжений сдвига на предельное состояние. При этих предположениях оболочки однородного строения заменяются трехслойными, где каждый слой воспринимает только мембранные напряжения.

Хотя все необходимые соотношения для жесткопластических оболочек построены [5], решения задач даже для трехслойных конструкций удается получить только для ограниченного диапазона геометрических параметров. Это привело к тому, что многие авторы [2] больше внимания стали уделять построению оценок предельных нагрузок кинематическими и статическими методами. При другом подходе, например в [6], оценки предельных нагрузок получают на основе точных решений для приближенных поверхностей текучести.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕКУЧЕСТИ ДЛЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Для цилиндрических оболочек обычно удается построить аппроксимацию поверхности текучести так, что решение существует при любых геометрических параметрах [2]. Используя такой подход при вычислении оценок предельной нагрузки для обеспечения заданной точности необходимо построить соответствующие вписанные и описанные поверхности [7]. Такие поверхности можно построить как параметрическую последовательность аппроксимаций, которые при стремлении некоторого параметра к предельному значению приближаются к точной поверхности. В работе [8] в качестве такой последовательности аппроксимаций предлагается использовать линейризованные поверхности, где в качестве параметра является число гиперплоскостей. Если решение для таких аппроксимаций существует, то разработка САЕ системы вычисления предельных нагрузок не представляет труда.

Поскольку при использовании линейризованных поверхностей текучести решение задач предельного анализа не всегда удается построить, то необходимо выявить причины этого и при необходимости определить способы изменения аппроксимаций поверхностей текучести так, чтобы предельные нагрузки во всех случаях можно было вычислить. Это возможно, поскольку для осесимметрических оболочек однородного строения решения получены при любых геометрических параметрах [9].

Анализ задач, когда решения удается построить только для ограниченного диапазона параметров, показывает, что в этих случаях разрешающие дифференциальные уравнения являются автономными. Например, для трехслойной цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением P постоянной интенсивности, уравнения равновесия и кинематические соотношения записываются в виде [10]:

$$\begin{aligned} m_1'' &= 2\mu^2(t_2 - p); \\ \dot{\epsilon}_{02} &= w; \quad \dot{\chi}_1 = \frac{-w''}{2\mu^2}, \quad x \in [0, 2], \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\mu^2 = \frac{l^2 N_0}{RM_0}; \quad p = \frac{PR}{N_0}; \quad w = \frac{\dot{W}}{R}; \quad t_2 = \frac{N_2}{N};$$

$$m_1 = \frac{M_1}{M_0}; \quad N_0 = 2\sigma_0 h; \quad M_0 = \sigma_0 hH; \quad w' = \frac{dw}{dx};$$

N_2, M_1 - меридиональное усилие и осевой изгибающий момент; $2l, R, h, H$ - длина, радиус срединной поверхности, толщина несущих и

срединного слоев, соответственно; σ_0, N_0, M_0 - предел текучести материала несущих слоев и предельные значения для усилия и момента.

Пусть материал несущих слоев подчиняется условию пластичности Треска, тогда сечение поверхности текучести плоскостью $N_1 = 0$ (осевое усилие отсутствует) представляет собой шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 1), стороны которого описываются соотношениями [2]:

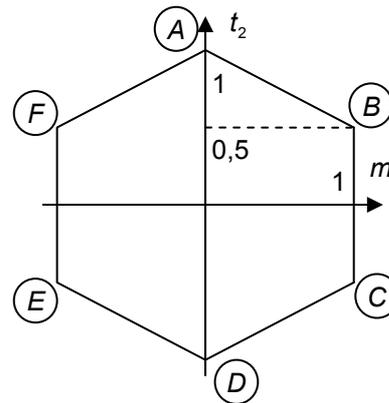


Рис. 1

$$\begin{aligned} AB; DE &: \pm(2t_2 + m_1) - 2 = 0; \\ BC; EF &: \pm m_1 - 1 = 0; \\ CD; AF &: \mp(2t_2 - m_1) - 2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В общем виде предельные соотношения можно записать в виде: $f_i(t_2, m_1) \leq 0, (i = \overline{1,6})$.

Ассоциированный закон течения [2]:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{02} &= \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i(t_2, m_1)}{\partial t_2}; \\ \dot{\chi}_{01} &= \sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i(t_2, m_1)}{\partial m_1}, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_i &> 0 \text{ если } f_i(t_2, m_1) = 0 \text{ и } df_i(t_2, m_1) = 0; \\ \lambda_i &= 0 \text{ если } f_i(t_2, m_1) < 0 \text{ или } df_i(t_2, m_1) < 0. \end{aligned}$$

Представим поверхность текучести в виде: $F(t_2, m_1) = \sum_i \lambda_i f_i(t_2, m_1) = 0$. Согласно (3)

полный дифференциал $dF(t_2, m_1) = 0$ или

$$\begin{aligned} \left(\sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial t_2} \right) t_2' + \left(\sum_i \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial m_1} \right) m_1' &= \\ = \dot{\epsilon}_{02} t_2' + \dot{\chi}_{01} m_1' &= 0 \end{aligned}$$

Интегрируя последнее соотношение при учете (1) и (3) получим:

$$m_1' w' - m_1'' w = C. \quad (4)$$

Здесь C – константа интегрирования, определяемая из краевых условий, и $C \neq 0$ [9], ибо в противном случае из (4) следует:

$$m_1'(x) = Bw(x),$$

где B константа интегрирования.

При шарнирном закреплении или жестком защемлении на краях оболочки задается нулевая скорость прогиба. Поскольку перерезывающая сила в окрестности заделки не равна нулю, то и константа $C \neq 0$ (4). Знак константы C определяется в соответствии с законом течения. Например, для оболочки с шарнирно опертыми краями и нагруженной внутренним давлением равенства $t_2(x) = 1$ и $m_1(x) = 0$ обеспечивают статически допустимое поле напряжений и, следовательно, для любого пластического режима (2) имеют место оценки $p \geq 1$, $m_1'' \leq 0$. Принимая, что при положительном внутреннем давлении $w(x) \geq 0$ и учитывая равенства $m_1'(1) = w'(1) = 0$, получим $C > 0$.

Пластические состояния, соответствующие сторонам BC и EF не могут реализоваться в конечной области оболочки [5], а их выполнение в некотором сечении сопровождается реализацией пластического шарнира.

В случае шарнирно опертой оболочки $m_1'' \leq 0$, $w \geq 0$, $w'' \leq 0$, что возможно при реализации пластического режима, соответствующего стороне AB (рис. 1). При реализации этого режима приведем уравнения (1)-(3) к нормальной форме:

$$\begin{aligned} m_1' &= \mu \sqrt{\left(\frac{1}{\mu} m_1'(0)\right)^2 + 4(1-p)m_1 - m_1^2}; \\ w' &= \mu \sqrt{\left(\frac{1}{\mu} w'(0)\right)^2 - w^2}, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение уравнений (5) существует, если правые части являются непрерывными функциями величин m_1, w [11]. Не трудно убедиться, что в случае $\mu \geq \pi/2$ условия существования решения для уравнений (5) не выполняются, а точка $\mu x = \pi/2$ является особой. В принципе решения можно продолжить при помощи других интегральных кривых, определяемых уравнениями:

$$\left[\left(\frac{1}{\mu} m_1'(0)\right)^2 + 4(1-p)m_1 - m_1^2 \right] = 0; \quad w = 0$$

или

$$\begin{aligned} m_1' &= -\mu \sqrt{\left(\frac{1}{\mu} m_1'(0)\right)^2 + 4(1-p)m_1 - m_1^2}; \\ w' &= -\mu \sqrt{\left(\frac{1}{\mu} w'(0)\right)^2 - w^2}. \end{aligned}$$

Кривые первой группы противоречат условию $C \neq 0$ (4), а второй группы противоречат крайним условиям в сечении $x = 1$. Следовательно, продолжить решение не представляется возможным.

Таким образом, решение задачи предельного анализа для шарнирно опертой трехслойной цилиндрической оболочки, нагруженной постоянным внутренним давлением, существует только при условии $\mu < \pi/2$.

Для коротких трехслойных оболочек ($\mu < \pi/2$), принимая механизм течения с реализацией в сечении $x = 1$ пластического шарнира, для определения предельного параметра нагрузки $p = p_T$ получим [2]:

$$p_T = 1 + \frac{\cos(\mu)}{2(1 - \cos(\mu))}, \quad 0 < \mu < \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Для построения приближенных решений задач предельного анализа трехслойных оболочек будем использовать приближенные поверхности текучести. Такие приближенные поверхности текучести необходимо выбирать так, чтобы при любом значении геометрического параметра μ возможно только точка $x = 1$ была особой.

Для обеспечения этого, сторону BC (рис. 1) заменим параболой:

$$m_1 = -4\epsilon t_2^2 + \omega, \quad (7)$$

где $\omega = 1 + \epsilon$ для описанной и $\omega = 1$ для вписанной поверхности текучести.

Последовательность поверхностей текучести (2), (7) при выполнении $\epsilon \rightarrow 0$ сходится к точной поверхности.

В силу симметрии задачи рассмотрим половину оболочки $x \in [0, 1]$, где в области $x \in [0, \bar{x}]$ реализуется пластическое течение, соответствующее стороне AB (рис. 1), а в области $x \in [\bar{x}, 1]$ состояние (7).

На первом участке $x \in [0, \bar{x}]$ решение уравнений (5) с крайними условиями

**УНИВЕРСАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ТЕКУЧЕСТИ ДЛЯ
ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

$m_1(0) = w(0) = 0$; $m_1(\bar{x}) = m_*$ (m_* определяется как абсцисса точки пересечения прямой AB (2) и параболы (7)) записывается в виде:

$$m_1 = \theta(1 - \cos(\mu x)) + \frac{\sin(\mu x)}{\sin(\mu \bar{x})} (m_* - \theta(1 - \cos(\mu \bar{x}))) \quad (8)$$

$$w = D \sin(\mu x), \quad x \in [0, \bar{x}]; \quad \mu \bar{x} < \frac{\pi}{2}.$$

Здесь $\theta = 2(1 - p)$; $D > 0$ некоторая константа. Поскольку скорости перемещений определяются с точностью до постоянного множителя [2], а $C \neq 0$ произвольная константа интегрирования, то можно принять $|D| = |C|$.

При $x = \bar{x}$ из (8) получим:

$$\begin{aligned} m_1(\bar{x}) &= m_*; \quad m_1'(\bar{x}) = m_*'; \\ w(\bar{x}) &= Dw_*; \quad w'(\bar{x}) = Dw_*'; \\ m_*' &= \frac{\mu}{\sin(\mu \bar{x})} [m_* \cos(\mu \bar{x}) + \theta(1 - \cos(\mu \bar{x}))]; \\ w_* &= \sin(\mu \bar{x}); \quad w_*' = \mu \cos(\mu \bar{x}). \end{aligned} \quad (9)$$

На втором участке в области $x \in [\bar{x}, 1]$ из (1), (7) получим:

$$\begin{aligned} m_1' &= \gamma U(\xi); \\ x &= 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{\xi_1 - \xi_2}} [(\xi_0 - \xi_2) \Pi(\varphi, k^2, k) + \xi_2 F(\varphi, k)]; \\ w &= \gamma U(\xi) \left[\frac{Dw_*}{m_*'} - V(\xi) \frac{2C}{\delta \gamma^3} \right]; \\ \xi &\in [\xi_0, \xi_*], \quad \xi_1 \geq \xi > \xi_0 > \xi_2. \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= \sqrt{v - \delta m_1}; \quad \xi_0 = \sqrt{v - \delta m_0}; \quad \xi_* = \sqrt{v - \delta m_*}; \\ \xi_{1,2} &= 0.5 * [(3p - \xi_0) \pm \sqrt{3 * (3p - \xi_0)(p + \xi_0)}]; \\ U(\xi) &= \sqrt{(\xi - \xi_0)(\xi_1 - \xi)(\xi - \xi_2)}; \quad \delta = \frac{1}{\varepsilon}; \quad v = \frac{\omega}{\varepsilon}; \\ \gamma &= \frac{2\mu}{\sqrt{3\delta}}; \quad \lambda = \sqrt{\frac{12}{\mu^2 \delta}}; \quad m_0 = m_1(1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\xi) &= \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{(2p - \xi)U(\xi)} - \frac{1}{(2p - \xi_*)U(\xi_*)} \right\} + \\ &+ \frac{1}{G} \left[\frac{U(\xi_*)}{(2p - \xi_*)} - \frac{U(\xi)}{(2p - \xi)} - \sqrt{\xi_1 - \xi_2} \times \right. \\ &\times (E(\varphi_*, k) - E(\varphi, k)) + \frac{2p - \xi_2}{\sqrt{\xi_1 - \xi_2}} \times \\ &\times (F(\varphi_*, k) - F(\varphi, k)) + \\ &\left. + \sqrt{\frac{(\xi_* - \xi_0)(\xi_1 - \xi_*)}{(\xi_* - \xi_2)}} - \sqrt{\frac{(\xi - \xi_0)(\xi_1 - \xi)}{(\xi - \xi_2)}} \right\}; \end{aligned}$$

$$G = 4p^3 + \xi_0^3 - 3p\xi_0^2;$$

где $F(\varphi, k)$, $E(\varphi, k)$, $\Pi(\varphi, k^2, k)$ - эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода соответственно и

$$\begin{aligned} \varphi_* &= \arcsin \sqrt{\frac{(\xi_1 - \xi_2)(\xi_* - \xi_0)}{(\xi_1 - \xi_0)(\xi_* - \xi_2)}}; \\ \varphi &= \arcsin \sqrt{\frac{(\xi_1 - \xi_2)(\xi - \xi_0)}{(\xi_1 - \xi_0)(\xi - \xi_2)}}; \quad k = \sqrt{\frac{(\xi_1 - \xi_0)}{(\xi_1 - \xi_2)}}. \end{aligned}$$

Соотношения (10) содержат три неизвестные величины p, m_0, \bar{x} , значения которых должны быть определены в ходе решения следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} m_*' - \gamma U(\xi_*) &= 0; \\ (1 - \bar{x}) \sqrt{\xi_1 - \xi_2} - \lambda \times [(\xi_0 - \xi_2) \times \\ &\times \Pi(\varphi_*, k^2, k) + \xi_2 F(\varphi_*, k)] &= 0; \quad (11) \\ \mu^2 (\xi_0 - 2p) \gamma U(\xi_0) \left[w_* - m_*' \frac{2V(\xi_0)}{\delta \gamma^2} \right] + \\ &+ w_*' (m_*')^2 - m_*' \mu^2 (\xi_* - 2p) w_* = 0. \end{aligned}$$

Здесь третье уравнение представляет соотношение

$$[m_*' w'(\bar{x}) - m_1''(\bar{x}) w(\bar{x})] + m_1''(1) w(1) = 0$$

при условии $D = C > 0$.

Решение системы уравнений (11) существует при любых значениях геометрического параметра μ . На рис. 2 сплошной линией приведены зависимости предельного параметра p_T , а пунктирными линиями, полученные в результате решения систем (11) для вписанной поверхности $\omega = 1$ (7) при различных значениях параметра ε .

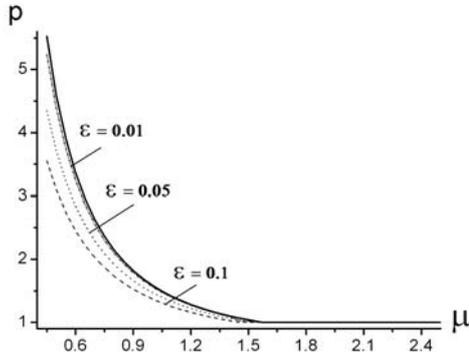


Рис. 2

В случае $\mu \geq \pi/2$ предельный параметр нагрузки p , полученный в результате решения уравнений (11), превосходит оценку $\bar{p} = 1$ на величину того же порядка, что и точность вычисления.

На рис. 3 приведены зависимости величины $\phi = p/p_T$ от геометрического параметра μ , где p определяется на основе описанной поверхности текучести при различных значениях величины ϵ .

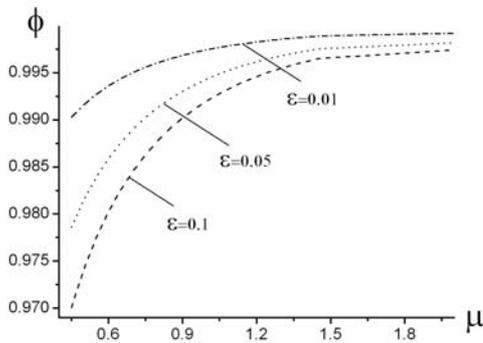


Рис. 3

Из рис. 3 следует, что предельный параметр нагрузки, определенный на основе вписанной поверхности текучести превосходит соответствующий параметр для внешней поверхности. На первый взгляд этот факт противоречит теоремам предельного анализа [3,7]. На самом деле это не так, поскольку теоремы предельного анализа доказаны при условии, что диссипация энергии на поверхностях разрыва скоростей при реализации различных полей совпадают [3]. В рассматриваемом случае решение (6) получено при наличии пластического шарнира, тогда как решение (11) получено при отсутствии таковых. Это и является главной причиной «нарушения» теорем предельного анализа.

Таким образом, при наличии пластических шарниров и различных механизмах течения теоремы предельного анализа в общем случае не выполняются.

Кроме этого, применительно к трехслойным цилиндрическим оболочкам можно построить сходящуюся последовательность аппроксимаций поверхности текучести таких, что при их выполнении пластическое течение выполняется во всем пролете оболочки, а пластические шарниры могут реализоваться только на краях оболочки. Предельная нагрузка соответствующая этим поверхностям стремится к точному значению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Системы САЕ должны приносить максимальную пользу//CAD/CAM/CAE Observer. 2003, п.3 (12). – С. 70–73.
2. Савчук А. О пластическом анализе оболочек / В кн. Механика деформируемого твердого тела. Направления развития. М: Мир,1983. – С.274–309.
3. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука,1966.–231 с.
4. Работнов Ю.Н. Приближенная техническая теория упругопластических оболочек // ПММ. 1951. т. XV, вып.2. С.167–174.
5. Немировский Ю.В., Налимов А.В. Предельное равновесие армированных оболочек нулевой гауссой кривизны // Прикладная механика. 1989. т.25, в.9. – С.72–79.
6. Михайлишин М.С., Немировский Ю.В., Шаблий О.Н. К теории предельного равновесия биметаллических оболочек вращения и круглых пластин // ПМТФ. 1974. № 2. – С.139–151.
7. Койтер В.Т. Общие теоремы упругопластических сред. М.: Высшая школа, 1967. –256 с.
8. Hodge P.G. Automatic piecewise linearization in ideal plasticity // Computation Methods in Appl. Eng. 1977. Vol.10, n.3. P. 249–272.
9. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Несущая способность гладких и подкрепленных цилиндрических оболочек // Прикладная механика. 1967. т.3, № 1. – С.18–23.
10. Cinquini C., Guerlement G., Lamblin D.O. Shell-Stiffener Interaction Application to Simply Supported Cylindrical Shells under uniform pressure // Int. J. Solids and Structures. 1985. Vol.21, n.5. P.447–465.
11. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнений. М.: Наука,1974. 331 с.