# ПОВЫШЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПЛАНОВО-ПРЕДУПРЕДИТЕЛЬНОГО РЕМОНТА ЭЛЕКТРООБОРУДОВАНИЯ В СЕЛЬСКОМ ХОЗЯЙСТВЕ

С.О. Хомутов, В.А. Рыбаков

*Авторами предлагается математический аппарат планирования расхода денежных средств в зависимости от их объемов и сроков выделения, при котором суммарные периоды ожидания ремонта электрооборудования будут минимальными. Это полностью решает задачу минимизации убытков, вызванных простоем оборудования вследствие выхода его из строя.*

Как известно, необходимым условием безубыточной работы и выживания в рыночных условиях любого предприятия является минимизация всех производственных издержек, которой можно достичь только полным анализом всех элементов бизнес-процесса, процессов обеспечения и менеджмента, а также взаимосвязей между ними.

В свете вышесказанного, среди элементов процесса обеспечения бизнес-процесса предприятий России и стран СНГ особое место занимает система планово-предупредительного ремонта (ППР) электрооборудования (ЭО). Однако сложившаяся на сегодняшний день тяжелая экономическая ситуация на промышленных и, особенно, сельскохозяйственных предприятиях ограничивает возможность применения данной системы ремонта ЭО.

В агропромышленном комплексе названная ситуация особенно усугубляется следующими факторами:

– высокая изношенность основных производственных фондов электрооборудования;

– отсутствие собственной ремонтной базы;

– недостаток или отсутствие современных средств автоматического защитного отключения электрооборудования;

– низкий уровень культуры обслуживания.

Практикой становится проведение ремонта электродвигателей (ЭД), являющихся наиболее распространенным в сельском хозяйстве типом ЭО, только после выхода их из строя. При этом процесс планирования ремонтных работ при подобном подходе недостаточен, а денежные средства на ремонт выделяются спонтанно, без учета необходимости текущего и планового обслуживания всего фонда установленного электрооборудования. При этом не учитывается, что парк электродвигателей – это взаимосвязанная система, в которой изменение параметров одного из ее элементов приводит к изменению параметров системы в целом.

Таким образом, парк электродвигателей некоторого хозяйства может быть представлен в виде системы, эффективность работы которой определяется фактом ее существования и установленными показателями надежности при ограниченном объеме выделенных на нее средств. Элементами данной системы являются объекты (электродвигатели), имеющие ряд изменяемых под воздействием внешних факторов свойств. В рамках рассматриваемого вопроса необходимо выделить следующие свойства объекта [5]:

– работоспособность на текущий момент времени, которая имеет два состояния – готов к работе (исправен) или не готов к работе (неисправен);

– техническое состояние, которое является одним из показателей надежности устройства, выраженным в численном виде (в данном случае – вероятность безотказной работы).

Каждому свойству объекта при решении реальной задачи минимизации всех производственных издержек соответствует некоторое значение этого свойства. Было бы неправильным рассматривать значение каждого объекта в отдельности, так как основное правило теории систем и системного анализа утверждает, что все элементы системы и все операции в ней должны рассматриваться только как одно целое. Плачевный опыт попыток решения системных вопросов с игнорированием этого принципа достаточно хорошо изучен. Локальные решения, учет недостаточного числа факторов, локальная оптимизация – на уровне отдельных элементов, почти всегда приводили к неэффективному в целом, а иногда и опасному по последствиям, результату.

К сожалению, на большинстве агропромышленных предприятий можно наблюдать именно такую ситуацию. Ремонт оборудования по факту выхода его из строя без анализа влияния данного мероприятия на другое электрооборудование является как раз игнорированием основного принципа системного анализа.

Опишем простейшую ситуацию, возникновение которой возможно при существующем «бессистемном» подходе к ремонтным мероприятиям. Пусть имеется некоторая система из трех несвязанных элементов, каждый из которых выполняет свой объем работ. Причем степень ответственности (т.е. величина убытков, вызванных выходом его из строя) для каждого элемента различна. Внезапно из строя выходит элемент номер один, и, соответственно, восстанавливается с помощью внутренних возможностей системы. Через некоторый промежуток времени из строя выходит элемент номер три, степень ответственности которого выше, но внутренних возможностей системы для его восстановления уже не хватает. Возникает необходимость привлечения дополнительных внешних ресурсов или в системе возникнут убытки, большие, чем при простое элемента номер один в течение продолжительного времени. Данные убытки неотвратимо приведут к снижению «живучести» системы. Ответ на вопрос о необходимости ремонта первого элемента может дать только полный системный анализ всех параметров, влияющих на «живучесть» системы в целом.

Для проведения подобного анализа необходимо создание математического аппарата, позволяющего ответить на вопросы об оптимальных сроках и качестве ремонта каждого электродвигателя. Поскольку время безотказной работы любого оборудования и эффективность его ремонта можно оценить только приближенно, то для создания наиболее работоспособной модели необходимо использовать методы теории вероятностей и математической статистики. Эффективным для данного случая является применение раздела данной теории, посвященного анализу графов состояний. Так, процесс эксплуатации электрооборудования любого агропромышленного предприятия можно рассмотреть как марковский процесс «гибели и размножения» с непрерывным временем [2].

На первом этапе исследования необходимо получить предельные зависимости вероятностей состояния каждого из двигателей от времени.

Рассмотрим электродвигатель, который может находиться в одном из двух состояний:

$S_1$ – двигатель исправен (работает);

$S_2$ – двигатель неисправен (находится в ремонте или ожидает замены на аналог).

Как показано на рис. 1, на электродвигатель, находящийся в состоянии $S_1$, действует поток отказов с интенсивностью $\lambda(t)$, переводящий двигатель в состояние $S_2$. На электродвигатель, находящийся в состоянии $S_2$, действует поток восстановлений с интенсивностью $\mu(t)$, причем оба потока – пуассоновские и независимые. Уравнения Колмогорова для данной системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} dp_1(t)/dt &= p_2(t)\mu(t) - p_1(t)\lambda(t) \\ dp_2(t)/dt &= p_1(t)\lambda(t) - p_2(t)\mu(t) \end{aligned}, \qquad (1)$$

где $p_1(t)$ и $p_2(t)$ – вероятности нахождения двигателя в состояниях $S_1$ и $S_2$ соответственно.

$$S_1 \underset{\mu(t)}{\overset{\lambda(t)}{\rightleftarrows}} S_2$$

Рисунок 1 – Возможные состояния электродвигателя

Так как в начальный момент времени двигатель исправен, то $p_1(0) = 1$. Тогда нормировочное условие запишется следующим образом: $p_1(t) + p_2(t) = 1$, откуда

$$p_2(t) = 1 - p_1(t). \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в первое уравнение системы (1) и отбросив второе, получим одно дифференциальное уравнение с одной неизвестной функцией $p_1(t)$:

$$dp_1(t)/dt = [1 - p_1(t)]\mu(t) - p_1(t)\lambda(t)$$

или

$$dp_1(t)/dt + [\mu(t) + \lambda(t)]p_1(t) = \mu(t). \qquad (3)$$

Решив данное линейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами при начальном условии $p_1(0) = 1$, получим следующую формулу:

$$p_1(t) = e^{-\int_0^t [(\lambda(\tau)+\mu(\tau)]dt} \times \left[ \int_0^t \mu(t) e^{\int_0^t [(\lambda(x)+\mu(x)]dx} d\tau + 1 \right]. \qquad (4)$$

Вычисление $p_1(t)$ при произвольных зависимостях $\mu(t)$ и $\lambda(t)$ достаточно трудоемко. Однако непосредственное использование численных методов решения уравнения (3) на ЭВМ оказывается более простым и менее трудоемким (особенно с учетом большого количества имеющегося на сегодняшний день соответствующего программного обеспечения и высокой производительности современных ЭВМ) [8].

В том случае, если финансовое положение хозяйства стабильно, и средства на ремонт выделяются равномерно, а качество ремонта не зависит от времени (ремонт производится на одном и том же предприятии), то можно рассмотреть ситуацию, когда интенсивности $\mu(t)$ и $\lambda(t)$ не зависят от времени:

$$\mu(t) = \mu = const, \lambda(t) = \lambda = const. \quad (5)$$

Как уже отмечалось, отыскание вероятности нахождения двигателя в состоянии $S_1$ по формуле (4) оказывается трудоемким, тогда как решение линейного дифференциального уравнения (3) при $\mu(t) = \mu$, $\lambda(t) = \lambda$ и начальном условии $p_1(0) = 1$:

$$dp_1(t)/dt + (\lambda + \mu)p_1(t) = \mu$$

позволяет получить искомый результат и имеет следующий вид:

$$p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda+\mu)t}, \quad (6)$$

откуда

$$p_2(t) = 1 - p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}). \quad (7)$$

Графики зависимостей $p_1(t)$ и $p_2(t)$ ($\mu > \lambda$) показаны на рисунке 2.

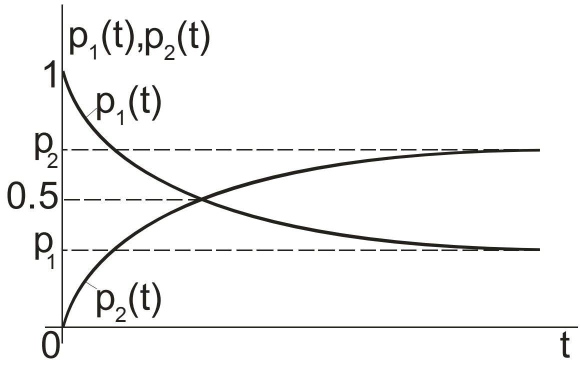


Рисунок 2 – Стационарный режим состояний электродвигателя

При $t \to \infty$ в системе устанавливается стационарный режим, для которого вероятности $p_1, p_2$ уже не зависят от времени и равны:

$$p_1 = \lim_{t\to\infty} p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_2 = \lim_{t\to\infty} p_2(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (8)$$

В стационарном режиме электродвигатель будет менять свое состояние, переходя из $S_1$ в $S_2$ и обратно, но вероятности этих состояний уже не зависят от времени. Их можно истолковать, как среднее относительное время пребывания электродвигателя в соответствующих состояниях $S_1$ и $S_2$.

Зная распределение (8), а также величины прибыли и убытков за каждый день работы или простоя электродвигателя, можно найти объем прибыли, приносимой каждым двигателям за некоторый период:

$$P = Ap_1 - Bp_2 = A\frac{\mu}{\lambda + \mu} - B\frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad (9)$$

где *P* – общая прибыль, руб./период;

*A* – прибыль, приносимая исправным двигателем, руб./период;

*B* – убытки от каждого неисправного двигателя, руб./период.

Однако средства, затраченные на ремонт электродвигателя, напрямую зависят от интенсивности потока его восстановления $\mu$. Данную зависимость можно описать выражением *C*($\mu$), отыскание вида которой будет произведено далее.

Таким образом, для того, чтобы формула (9) была полностью верна, необходимо записать ее следующим образом:

$$P = A\frac{\mu}{\lambda + \mu} - B\frac{\lambda}{\lambda + \mu} - C(\mu). \quad (10)$$

Как известно, при планировании нового финансового периода определяется объем денежных средств, выделяемых на обслуживание парка электрооборудования. Интенсивность потока восстановления электродвигателя является прямой зависимостью от объема выделенных на его ремонт средств, и, соответственно, в течение данного периода меняться не будет. Интенсивность потока отказов может зависеть от времени только в том случае, если в течение текущего периода меняются внешние условия работы электродвигателя [5]. В большинстве случаев они постоянны на протяжении всего срока службы оборудования. Исключением является подключение исправного двигателя к другому типу нагрузки, что в условиях сельского хозяйства маловероятно. Отсюда следует, что в условиях сельскохозяйственного производства можно принять $\mu = const, \lambda = const$, а выражение (10) является адекватным и может быть использовано при практических расчетах.

В рамках второго этапа рассмотрим процесс эксплуатации на типичном для России и стран СНГ сельскохозяйственном предприятии ряда однотипных электродвигателей. Интенсивность капитального ремонта или поступления новых машин в хозяйство равна $\lambda(t)$. Каждый поступивший электродвигатель имеет время эксплуатации *T*, по прошествии которого списывается или отправляется на капитальный ремонт. Время *T* распределено по показательному закону с параметром $\mu$. Найдем одномерный закон распределения случайного процесса *X*(*t*) – числа электродвигателей заданного типа, находящихся в эксплуатации на момент времени *t*. Максимальное число электродвигателей равно *n*.

В данном случае имеет место процесс «гибели и размножения» с ограниченным числом состояний, размеченный граф которого представлен на рисунке 3 [2].

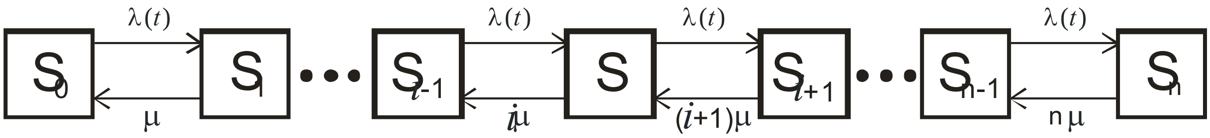


Рисунок 3 – Процесс гибели и размножения *X*(*t*)

В свою очередь, система уравнений Колмогорова для размеченного графа, изображенного на рисунке 3, имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&dp_0(t)/dt = \mu p_1 - \lambda(t)p_0(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&dp_i(t)/dt = \lambda(t)p_{i-1}(t) + (i+1)\mu p_{i+1}(t) -\\
&-(\lambda(t)+i\mu)p_i(t)\ \ (i=1,\,2,\,\dots\,,\,n-1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&dp_n(t)/dt = \lambda(t)p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Система (11) может быть решена при следующих начальных условиях:

$$p_k(0)=1,\ p_i(0)=0\ (i=1,\,2,\,\dots\,,\,i\neq k),$$

где *k* – начальное количество электродвигателей в данном хозяйстве.

Кроме того, необходимо учитывать нормировочное условие: $\sum_{i=1}^{n} p_i(0) = 1$.

Отыскание решения системы (11) в общем виде при произвольной функции $\lambda(t)$ представляет значительные трудности и не имеет практических приложений. Для настоящей задачи необходимо знать характеристики процесса *X*(*t*): математическое ожидание *M*[*X*(*t*)] и дисперсию *D*[*X*(*t*)], а одномерный закон распределения является промежуточным звеном в подобном исследовании [2].

Если принять интенсивность потоков выходов из строя и восстановления постоянными, то появляется возможность сравнительно легкого непосредственного вычисления характеристик процесса. При данных допущениях и конечном числе состояний *n*+1 будет иметь место стационарный режим. Это вытекает из того, что множество *W* всех состояний процесса выхода из строя и восстановления (гибели и размножения) является эргодическим [3]. Следовательно, система *S* с конечным числом состояний *n*+1, в которой протекает процесс гибели и размножения, является простейшей эргодической системой, граф состояний которой представлен на рис. 4.


Рисунок 4 – Размеченный граф состояний для простейшей эргодической системы с конечным числом состояний

Предельные вероятности состояний для простейшего эргодического процесса «гибели и размножения», находящегося в стационарном режиме, могут быть найдены из системы уравнений (12), в которой все интенсивности потоков взяты постоянными, а все производные вероятностей состояний приняты равными нулю:

$$
\begin{aligned}
& dp_0(t)/dt = \mu_1(t)p_1(t) - \lambda_0(t)p_0(t), \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& dp_i(t)/dt = \lambda_{i-1}(t)p_{i-1}(t) + \mu_{i+1}(t)p_{i+1}(t) - \\
& -(\lambda_i(t)+\mu_i(t))p_i(t) \ (i=1,\,2,\,\dots\,,\,n-1), \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& dp_n(t)/dt = \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) - \mu_n(t)p_n(t).
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
& 0 = \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& 0 = \lambda_{i-1}p_{i-1} + \mu_{i+1}p_{i+1} - (\lambda_i + \mu_i)p_i \\
& (i=1,\,2,\,\dots\,,\,n-1), \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& 0 = \lambda_{n-1}p_{n-1} - \mu_n p_n.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Тогда из первого уравнения:

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1.$$

Из второго уравнения:

$$\mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1)p_1 - \lambda_0 p_0,$$

но, $\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$, следовательно,

$$\mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1)p_1 - \mu_1 p_1 = \lambda_1 p_1.$$

Далее $\mu_3 p_3 = (\lambda_2 + \mu_2)p_2 - \lambda_1 p_1$

но, $\lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2$, откуда,

$$\mu_3 p_3 = (\lambda_2 + \mu_2)p_2 - \mu_2 p_2 = \lambda_2 p_2$$

и т.д. Проводя такую рекуррентную процедуру, можно доказать, что

$$\mu_i p_i = \lambda_{i-1} p_{i-1} \ (i=1,\,2,\,\dots\,,\,n-1). \tag{14}$$

подставляя равенство (14) в любое уравнение системы (13), можно убедиться в его справедливости.

Равенство (14) можно сформулировать в виде правила: для простейшей схемы выхода из строя и восстановления, находящейся в стационарном режиме, значения переходных вероятностей между двумя соседними состояниями равны.

Из равенства (14) получаем:

$$
\begin{aligned}
& p_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}p_{i-1} = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\frac{\lambda_{i-2}}{\mu_{i-1}}\dots\frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0 = \\
& = p_0\prod_{k=1}^{i}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} \ (i=1,\,2,\,\dots\,,\,n)
\end{aligned}. \tag{15}
$$

Таким образом, любую предельную вероятность можно выразить через предельную вероятность $p_0$. Вероятность $p_0$ можно найти из нормировочного условия

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = p_0 + p_0\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{i}\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} = 1,$$

откуда

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{i}\lambda_{k-1}/\mu_k}. \tag{16}$$

Формулы (14) и (16) дают возможность вычислить предельные вероятности состояний простейшего процесса выхода из строя и восстановления, находящегося в стационарном режиме при конечном числе состояний.

Так как в хозяйстве не может находиться более *n* электродвигателей данного типа, то:

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{i}\lambda_{k-1}/\mu_k} = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{n}a^i/i!} = \frac{e^{-a}}{\sum_{i=0}^{n}a^i e^{-a}/i!} = p(0,a)/R(n,a),$$

где $P(k,a) = a^k e^{-a}/k!\,(k=0,1,\dots)$ - подчиняется распределению Пуассона:

$$R(n,a) = \sum_{k=0}^{n} P(k,a).$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
& p_i = p_0\prod_{k=1}^{i}\lambda/\mu_k = p_0\prod_{k=1}^{i}\lambda/(k\mu) = \\
& = p_0\frac{a^i}{i!} = \frac{a^i e^{-a}}{i!}\cdot\frac{1}{R(n,a)} = P(i/a)/R(n,a) \\
& (i=0,1,\dots,n).
\end{aligned} \tag{17}
$$

В теории массового обслуживания распределение вида (17) называется усеченным законом Пуассона [2]. Этот закон зависит от двух параметров $\alpha$ и $n$. Таким образом, число электродвигателей, находящихся в эксплуатации в стационарном режиме, при условии, что их общее число не может быть больше $n$, распределено по усеченному закону Пуассона с параметрами $\alpha$ и $n$, где параметр $\alpha$ равен отношению интенсивности потока ремонта электродвигателей в хозяйстве $\lambda$ к интенсивности потока выхода из строя каждого электродвигателя $\mu$.

Далее можно найти математическое ожидание числа эксплуатируемых электродвигателей в стационарном режиме:

$$M[X(t)] = \sum_{i=0}^{n} ip_i = \frac{\sum_{i=1}^{n} iP(i,a)}{R(n,a)} =$$

$$= \frac{1}{R(n,a)} \sum_{i=1}^{n} i \frac{a^i}{i!} e^{-a} = \frac{1}{R(n,a)} \sum_{i=1}^{n} \frac{a^i}{(i-1)!} e^{-1} =$$

$$= \frac{a}{R(n,a)} \sum_{i=1}^{n} \frac{a^{i-1}}{(i-1)!} e^{-a} = \frac{aR(n-1,a)}{R(n,a)}. \quad (18)$$

Из формулы (18), в частности, следует формула (19):

$$\sum_{i=0}^{n} iP(i,a) = \sum_{i=1}^{n} P(i,a) = aR(n-1,a). \quad (19)$$

$(n = 1, 2, \ldots)$.

Для вычисления дисперсии числа эксплуатируемых машин найдем второй начальный момент:

$$M[X^2(t)] = \sum_{i=2}^{n} i^2 p_i = \frac{1}{R(n,a)} \sum_{i=0}^{n} i^2 \frac{a^i}{i!} e^{-a}$$

$$= \frac{1}{R(n,a)} \sum_{i=1}^{n} i \frac{a^i}{i-1} e^{-a} =$$

$$= \frac{1}{R(n,a)} \sum_{i=0}^{n} (i-1+1) \frac{a^i}{(i-1)!} e^{-a} =$$

$$= \frac{1}{R(n,a)} \left[ \sum_{i=1}^{n} (i-1) \frac{a^i}{(i-1)!} e^{-a} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a^i}{(i-1)!} e^{-1} \right] =$$

$$= \frac{1}{R(n,a)} \left[ \sum_{i=2}^{n} (i-1) \frac{a^i e^{-a}}{(i-1)!} + a \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a^i}{i!} e^{-a} \right] = \quad (20)$$

$$= \frac{1}{R(n,a)} \left[ a^2 \sum_{i=0}^{n-2} \frac{a^i}{i!} e^{-a} + a \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a^i}{i!} e^{-a} \right] = $$

$$= a \frac{R(n-1,a)}{R(n,a)} + a^2 \frac{R(n-2,a)}{R(n,a)} \quad (n > 1),$$

откуда

$$D[X(t)] = M[X^2(t)] - (M[X(t)])^2 = \quad (21)$$

$$= \frac{aR(n-1,a)}{R(n,a)} +$$

$$+ a^2 \left[ \frac{R(n-2,a)}{R(n,a)} - \left( \frac{R(n-1,a)}{R(n,a)} \right)^2 \right] \quad (n > 1).$$

Можно заметить, что при $n \to \infty$ $M[X(t)] = D[X(t)] = a$, так как $\lim_{k \to \infty} (R,a) = 1.$

Таким образом, зависимости (18-20) позволяют вычислять среднее количество и дисперсию числа эксплуатируемых электродвигателей при известных постоянных интенсивностях процессов выхода из строя и восстановления.

Как было сказано выше, на группу электродвигателей действует поток восстановления с некоторой интенсивностью $\lambda(t)$. Для нахождения количества эксплуатируемых электродвигателей по формуле (18) необходимо максимально подробно описать свойства данного потока.

Введем следующую терминологию [1]: каждый вышедший из строя электродвигатель назовем запросом на обслуживание, рабочую единицу ремонтного предприятия, способную за некоторый период отремонтировать двигатель – восстанавливающим элементом или линией обслуживания.

В теории восстановления наибольшее распространение получили два вида обслуживающих систем: системы с потерями и системы с ожиданиями. В системах с потерями запрос на обслуживание, заставший все восстанавливающие элементы занятыми, получает отказ и теряется. В системах с ожиданиями все запросы на обслуживание, которые не могут быть рассмотрены на момент поступления, составляют очередь, и обслуживаются по мере освобождения восстанавливающих элементов. Очевидно, что процесс ремонта электродвигателей на предприятиях аграрно-промышленного комплекса является примером обслуживающей системы с ожиданием.

На основе данных проведенных диагностических мероприятий можно с некоторой вероятностью $S_д$ определить остаточный эксплуатационный ресурс электродвигателей. Очевидно, что оптимальным периодом ремонта будет момент времени непосредственно перед выходом электродвигателя из строя с учетом того, что в данный момент установка или не используется, или имеется резерв.

Рассмотрим идеальный случай, когда число линий обслуживания не ограничено, и любой двигатель начинает ремонтироваться непосредственно после выхода из строя. В данном случае интенсивность потока восстановления за некоторый расчетный период $\lambda(t)_{ср}$ равна:

$$\lambda(t)_{ср} = \frac{N_{диаг}(t) \cdot S_Д + N_{внез}}{T_р}, \quad (22)$$

где $N_{диаг}(t)$ – число ЭД, которые должны выйти из строя за расчетный период;

$N_{внез}$ – число двигателей, внезапно вышедших из строя;

$T_p$ – расчетный период.

Издержки от простоя оборудования могут возникнуть только при внезапном выходе из строя электродвигателей и составят:

$$C_{внез} = \sum_{i=1}^{n} C_{простi} \cdot T_{простi} , \qquad (23)$$

где $C_{простi}$ - издержки от простоя внезапно вышедшего из строя электродвигателя;

$T_{простi}$ - время простоя внезапно вышедшего из строя электродвигателя.

Данные издержки можно оценить только приблизительно, основываясь на том, что в среднем в год внезапно выходят из строя порядка 3-5% двигателей.

Однако, в реальности количество линий обслуживания не может быть бесконечным, так как это приведет к слишком большим затратам на их эксплуатацию. Тогда основной задачей является нахождение оптимального количества обслуживающих линий с точки зрения затрат на их содержание с одной стороны и убытков от простоя оборудования с другой.

Зная количество восстанавливающих элементов, интенсивность выхода электродвигателей из строя, а также время ожидания двигателями ремонта можно полностью описать случайный процесс восстановления $\lambda(t)$.

Рассмотрим полнодоступный пучок обслуживающих линий с ожиданием. Поступившему запросу на обслуживание приходится ждать обработки тогда и только тогда, когда он застает все *n* линий занятыми. На первый план выходит такая величина, как вероятность ожидания. Эта величина понятным образом играет известную роль в оценке качества работы пучка. Однако, для систем с ожиданием эта роль сравнительно невелика, так как, если даже значительному большинству вызовов приходится ожидать, обслуживание должно быть признано вполне удовлетворительным во всех тех случаях, когда промежутки ожидания оказываются в своем большинстве очень малыми. Решающую роль играет не частота ожидания, а природа времени ожидания $\gamma$ как случайной величины; частота же ожидания дает нам только один штрих этой картины – вероятность неравенства $\gamma > 0$. Понятно поэтому, что конечной целью исследования данного полнодоступного пучка линий с ожиданием служит отыскание закона распределения времени ожидания $\gamma$.

При решении данной задачи наличие или отсутствие упорядоченности пучка линий значения не имеет. Входящий поток вызовов всегда будем предполагать простейшим с параметром $\lambda$. Для простоты решения задачи определим, что вызовы обслуживаются в порядке их поступления. Длительности обслуживания всегда будут мыслиться независимыми друг от друга, так и от течения потоков вызовов. Что касается закона распределения этих длин, то именно он составляет собой основной момент различия в данной задаче. Введем, что длительность обслуживания $\ell$ подчиняется показательному закону.

$P\{\ell > t\} = e^{-\beta t}$, $t > 0$ $\beta > 0$ - постоянная.

В общем виде решение подобной задачи было дано еще Эрлангом [1].

Во всем дальнейшем нам придется иметь дело с промежутком времени бесконечно малой длины $\tau$. Обозначим через $0(\tau)$ всякую бесконечно малую величину порядка выше $\tau$ и соединим знаком $\approx$ всякие две величины, разность которых есть величина вида $0(\tau)$.

Вероятность поступления по меньшей мере одного запроса за промежуток времени $\tau$ есть величина $\approx \lambda\tau$, а вероятность $\psi(\tau)$ поступления более одного запроса – величина вида $0(\tau)$. С другой стороны, если какая-либо линия в данный момент занята, то вероятность оставаться занятой еще в течение $\tau$ секунд (или более) для нее равна $e^{-\tau}$; если занято $k$ линий, то вероятность того, что все они останутся занятыми в течение промежутка времени $\tau$ равна $e^{-k\tau}$; вероятность же того, что в течение промежутка времени $\tau$ по меньшей мере одна из этих линий освободится, равна:

$$1 - e^{-k\tau} \approx k\tau .$$

Поступление запросов на обслуживание и освобождение линий представляет собой элементарные события, в моменты которых скачкообразно меняется количество занятых линий $N(t)$. Вероятность наступления в промежутке длины $\tau$ по меньшей мере одного элементарного события (того или другого типа) при $\tau \to 0$ асимптотически пропорциональна $\tau$; вероятностью же наступления в промежутке длины двух или более элементарных событий (все равно каких типов) есть величина вида $0(\tau)$ (или, что то же, $\approx 0$).

Эти замечания позволяют легко найти асимптотические выражения переходных вероятностей $P_{ik}(\tau)$ при $\tau \to 0$. Прежде всего, если $|i-r|>1$, то переход из состояния $i$ в состояние $k$ требует, очевидно, наступления, по меньшей мере, двух элементарных событий; поэтому, в силу вышесказанного, при $\tau \to 0$:

$$P_{ik}(\tau) \approx 0 \ (|i-k|)>1. \tag{24}$$

Далее, для перехода из состояния $k-1<n$ в состояние $k$ требуется либо наступление одного вызова, либо наступление более чем одного элементарного события; поэтому, в силу вышесказанного, при $\tau \to 0$:

$$P_{k-1,k}(\tau) \approx \lambda\tau . \tag{25}$$

Чтобы система перешла из состояния $k+1$ в состояние $k \geq n$, требуется либо освобождение одной из линий, либо наступление более чем 1 элементарного события:

$$P_{k+1,k}(\tau) \approx n\beta\tau . \tag{26}$$

Наконец, в силу (24) мы имеем:

$$P_{kk}(\tau) \approx 1-\lambda\tau - n\beta t, \text{ при } \tau \to 0. \tag{27}$$

Таким образом, для всех вероятностей $P_{ik}(\tau)$ нами установлены очень простые асимптотические выражения с точностью до величины вида $0(\tau)$.

Используем уравнение Чепмана – Колмогорова:

$$P_{ik}(t_1+t_2) = \sum_{r=0}^{n} P_{ir}(t_1)P_{rk}(t_2),$$

помножим его обе части на $P_i(0)$ и просуммируем по $i$ от 0 до $n$. В силу формулы полной вероятности $P_k(t) = \sum_{r=0}^{n} P_i(0)P_{rk}(t)$ получаем:

$$P_k(t_1+t_2) = \sum_{r=0}^{n} P_r(t_1)P_{rk}(t_2) \ (0 \leq k \leq n). \tag{28}$$

Применяя к вероятности $P_{rk}(\tau)$ в правой части равенства (28) найденные асимптотические оценки, находим:

$$P_k(t+\tau) = P_{r-1}(t)P_{k-1,k}(\tau) + P_r(t)P_{kk}(\tau) +$$
$$+ P_{r+1}(t)P_{k+1,k}(\tau) + 0(\tau) = P_{r-1}(t)\lambda\tau +$$
$$+ P_r(t)(1-\lambda\tau - n\beta\tau) + P_{r+1}(t)n\beta t,$$

откуда, деля обе части уравнения на $\tau$ и устремляя $\tau \to 0$, получаем:

$$P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\beta)P_k(t) +$$
$$+ n\beta P_{k+1}(t) \ (k \geq n).$$

Таким образом, система уравнений Колмогорова выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \beta P_1(t); \\ P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\beta)P_k(t) + \\ + (k+1)\beta P_{k+1}(t) \ (0<k<n); \\ P_k'(t) = \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\beta)P_k(t) + \\ + n\beta P_{k+1}(t) \ (k \geq n). \end{cases} \tag{29}$$

Как и в случае системы с потерями, в качестве вероятностей состояний принимаются пределы, к которым стремятся вероятности $P_k(t)$ при $t \to \infty$. Существование данного предела, также, как и существование пределов величин $P_k(t)$ при $t \to \infty$, доказано и при $t \to \infty$ существуют пределы $\lim\limits_{t\to\infty} P_k(t) = p_k \ (k = 0,1,\ldots)$, и соответствующий предельный переход возможен одновременно во всех уравнениях системы (29).

Левые части системы уравнений (29) обращаются в нуль. Доказательство этого утверждения элементарно. Действительно, если бы какое-нибудь $P_k'(t)$ стремилось к числу, отличному от нуля, соответствующее $|P_k(t)|$ при $t \to \infty$ возрастало бы безгранично, что (независимо от реального смысла величин $P_k(t)$ как вероятностей) невозможно в силу доказанной теоремы Маркова, которая утверждает, что для любого транзитивного процесса Маркова $P_{ik}(t) \ (0 \leq i \leq n, \ 0 \leq r \leq n)$ предел $\lim\limits_{t\to\infty} P_{ik}(t) = p_k \ (0 \leq i \leq n, \ 0 \leq r \leq n)$ существует и не зависит от $i$.

Система уравнений (29) преобразуется в следующую:

$$\begin{cases} -\lambda P_0(t) + \beta P_1(t) = 0; \\ \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\beta)P_k(t) + \\ + (k+1)\beta P_{k+1}(t) = 0 \ (0<k<n); \\ \lambda P_{k-1}(t) - (\lambda + n\beta)P_k(t) + \\ + n\beta P_{k+1}(t) = 0 \ (k \geq n). \end{cases} \tag{30}$$

из которой, в соединение с нормирующим условием

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1,$$

определяются числа $p_k$.

Полагая

$$\lambda p_{k-1} - k\beta p_k = z_k \ (1 \le k \le n),$$

находим из системы (30)

$$z_1 = 0,\ z_k - z_{k+1} = 0\ (1 \le k \le n),$$

откуда

$$z_k = 0\ (0 \le k \le n),$$

или

$$p_k = \frac{\lambda}{k\beta} p_{k-1}\ (0 < k \le n).$$

Это дает, если для краткости ввести

$$y = \frac{\lambda}{\beta},$$

$$p_k = \frac{y^k}{k!} p_0\ (0 \le k \le n);$$

в частности, при $k = n$ мы находим

$$p_n = \frac{y^n}{n!} p_0. \qquad (31)$$

Чтобы найти значения $p_k$ при $k > n$, мы обращаемся к последней группе уравнений (30). Перепишем их в виде:

$$n\beta(p_{k+1} - p_k) = \lambda(p_k - p_{k-1})\ (k \ge n),$$

и просуммируем по $k$ от $n$ до $n + r$

$$n\beta(p_{n+r+1} - p_n) = \lambda(p_{n+r} - p_{n-1}),$$

откуда

$$n\beta p_{n+r+1} + z_n = \lambda p_{n+r},$$

или, так как $z_n = 0,\ \dfrac{\lambda}{\beta} = y,$

$$p_{n+r+1} = \frac{y}{n} p_{n+r}\ (r \ge 0),$$

и, следовательно, в силу (30)

$$p_{n+r+1} = \left(\frac{y}{n}\right)^{r+1} \frac{y^n}{n!} p_0\ (r \ge 0).$$

Таким образом, для любого $r \ge n$ мы имеем

$$p_k = \left(\frac{y}{n}\right)^{kr-n} p_n \frac{y^n}{n!\,n^{r-n}} p_0. \qquad (32)$$

Соединяя этот результат с полученным прежде для $r \le n$, мы находим

$$\begin{cases} p_k = \dfrac{y^k}{k!} p_0\ (0 \le k \le n); \\ p_k = \dfrac{y^k}{n!\,n^{k-n}} p_0\ (k \ge n). \end{cases} \qquad (33)$$

Нам остается найти $p_0$. Нормирующее условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$$

дает

$$\frac{1}{p_0} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^k}{k!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{y}{n}\right)^k =$$

$$= s_{n-1}(y) + \frac{y^n}{(n-1)!\,(n-y)},$$

где положено $s_m(y) = \sum\limits_{k=0}^{m} \left(\dfrac{y^k}{k!}\right)$.

Вероятность найти все линии занятыми (“вероятность ожидания”) равна, в силу (32),

$$\prod = \sum_{k=n}^{\infty} p_n = \frac{n^n p_0}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{y}{n}\right)^k = \frac{y^n}{n!} \frac{p_0}{1 - \frac{y}{n}}. \qquad (34)$$

Теперь можно легко найти вероятность $P\{\gamma > t\}$ того, что для поступившего в произвольно выбранный момент запроса на обслуживание время ожидания будет больше $t$. Обозначим через $P_k\{\gamma > t\}$ условную вероятность того же неравенства в предположении, что произведенный запрос застал систему в состоянии $k$. По формуле полной вероятности мы имеем [3]

$$P\{\gamma > t\} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k P_k\{\gamma > t\},$$

или, так как, очевидно, $P_k\{\gamma > t\} = 0$ при $k < n$ и $t \ge 0$,

$$P\{\gamma > t\} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k P_k\{\gamma > t\}. \qquad (35)$$

Величины $p_k$ нам известны; остается определить величины $P_k\{\gamma > t\}$ при всех $k \ge n$.

Положим $k - n = \nu(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Необходимо найти вероятность неравенства $\gamma > t$ при условии, что в момент вызова все линии были заняты и, сверх того, имелось $\nu$ ожидающих. Очевидно, что при этом запрос получает обслуживание после $(\nu + 1)$-го освобождения линии. Искомая вероятность есть, поэтому, вероятность того, что за время $t$ после появления нашего вызова произойдет не более чем $\nu$ освобождений линии. Пусть $q_r(t)$ $(0 \le r \le \nu)$ есть вероятность того, что за это время произойдет ровно $r$ освобождений; тогда в силу $k-n=\nu$

$$P_k\{\gamma > t\} = \sum_{r=0}^{k-n} q_r(t) \ (k \ge n).$$

Но поток освобождений за время ожидания нашего запроса представляет собой, в силу показательного закона распределения продолжительности обслуживания, простейший поток с параметром $n\beta$, так как вероятность того, что не произойдет ни одного освобождения за время $t$ после такого момента, когда все линии заняты, равна $\left(e^{-\beta t}\right)^n = e^{-\beta b t}$. Величина $q_r(t)$ есть вероятность того, что за время $t$ наступит $r$ событий этого потока, поэтому

$$q_r(t) = e^{-n\beta t}\frac{(n\beta t)^r}{r!} \ \ (0 \le r \le \nu),$$

и мы находим

$$P_k\{\gamma > t\} = \sum_{r=0}^{k-n} e^{-n\beta t}\frac{(n\beta t)^r}{r!} \ (k \ge n).$$

Возвращаясь к формуле (35) и используя соотношение (32), находим

$$P\{\gamma > t\} = \sum_{k=n}^{\infty} p_k \sum_{r=0}^{k-n} e^{-n\beta t}\frac{(n\beta t)^r}{r!} =$$

$$= e^{-n\beta t}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{y}{n}\right)^{k-n} p_n \sum_{r=0}^{k-n}\frac{(n\beta t)^r}{r!} =$$

$$= p_n e^{-n\beta t}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n\beta t)^r}{r!}\sum_{k=n+r}^{\infty}\left(\frac{y}{n}\right)^{k-n} =$$

$$p_n e^{-n\beta t}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(n\beta t y)^r}{n^r!}\sum_{k=n+r}^{\infty}\left(\frac{y}{n}\right)^{k-n-r} =$$

$$= \frac{p_n e^{-n\beta t}}{1-\dfrac{y}{n}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^r}{r!} = \frac{p_n}{1-\dfrac{y}{n}}e^{-(n\beta-\lambda)t},$$

или, так как в силу (31) и (34)

$$p_n = \frac{y^n}{n!}\,p_0 = \prod\left(1-\frac{y}{n}\right)$$

$$P\{\gamma > t\} = \prod e^{-(n\beta-\lambda)t} \ \ (t \ge 0).$$

Этим поставленная задача решена. Видно, что в принятых условиях время ожидания подчиняется показательному закону распределения с параметром $n\beta-\lambda$. Вместе с тем получаем:

$$P\{\gamma > 0\} = \prod,$$

как оно и должно быть, так как через $\prod$ в выражении (34) мы как раз обозначили вероятность застать все линии занятыми (“вероятность ожидания”).

Таким образом, знание данной вероятности полностью решает поставленную задачу. Действительно, задавая некоторую продолжительность ожидания *t*, при которой величина убытков от простоя оборудования не будет превышать установленный предел, можно определить количество необходимых линий обслуживания, которое напрямую зависит от объема выделенных на ремонт денежных средств.

Другими словами, изменяя объемы и сроки выделения денежных средств, можно спланировать их расход таким образом, при котором суммарные периоды ожидания ремонта электрооборудования будут минимальными. Это полностью решает поставленную задачу минимизации убытков, вызванных простоем оборудования вследствие выхода его из строя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинчин С.Я. Математические задачи теории массового обслуживания. – М.: Высш.шк., 2003. – 286 с.
2. Вентцель М.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – М.: Высш. шк., 1999. – 342 с.
3. Пугачев В.С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 883 с.
4. Гутов И.А. Прогнозирование состояния электродвигателей на основе использования многофакторных моделей старения изоляции: Дис. … канд. техн. наук. – Барнаул, 1997. – 255 с.
5. Голинкевич Т.А. Прикладная теория надежности: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1985. – 168 с.
6. Логашев Г.И., Кузьменко В.М. Организация обслуживания электроустановок в хозяйстве. – М.: Колос, 1971. – 159 с.
7. Хомутов О.И. Диагностика состояния электродвигателей в условиях эксплуатации: Учеб. пособие. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 1993. – 119 с.
8. Веников В.А., Веников Г.В. Теория подобия и моделирования применительно к задачам электроэнергетики. – М.: Высш. шк., 1984. – 440 с.