

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ И МАССООБМЕНА В ТРУБЧАТОМ МЕМБРАННОМ КАНАЛЕ

Т.М. Тушкина, Н.В. Павлова

Объектом исследования является гидродинамика и массообмен в трубчатом мембранном канале. Решение поставленной задачи получено с помощью численного метода, предложенного Д.Б. Сполдингем. Исследована зависимость полей гидродинамических переменных и концентрации от физических и геометрических параметров, определяющих задачу. Проведен анализ найденного решения на предмет согласованности с известными приближенными решениями, полученными другими авторами различными методами.

Сфера использования мембран при решении разнообразных технологических задач постоянно расширяется, и в настоящее время она охватывает уже десятки отраслей промышленности, включая электронную, металлургическую, пищевую, фармацевтическую и т.д. В химической технологии с помощью мембран производят разделение, очистку и обогащение газов, концентрирование и фракционирование растворов высокомолекулярных соединений, очистку химических реагентов и органических растворителей, водоподготовку и очистку сточных вод.

Расчет процессов массопереноса в мембранных каналах сводится, вообще говоря, к совместному решению уравнения конвективной диффузии и уравнений Навье-Стокса с соответствующими граничными условиями, одним из которых является условие, что на стенках канала касательная составляющая вектора скорости обращается в нуль (условие прилипания). Кажущаяся простота указанных дифференциальных уравнений, которые необходимо решить для описания процессов в мембранном канале и четкая постановка задач осложняется при их решении трудностью аналитического исследования из-за нелинейности, а наличие малых параметров перед старшими производными затрудняет получение достаточно точных решений.

Действительная трудность расчета поля скоростей связана с неизвестным полем давления. Градиент давления составляет часть источникового члена в уравнении количества движения, при этом нет явного уравнения для определения давления. Поле давления определяется через уравнение неразрывности. Если правильное поле давления подставить в уравнение количества движения, то получаемое из них поле скорости будет удовлетворять уравнению неразрывности.

Связанные с нахождением давления трудности привели к возникновению методов

(например, [1]), основанных на решении уравнений, получаемых при исключении давления из системы уравнений Навье-Стокса посредством введения дифференциальных операторов функции тока ψ , завихренности ω .

Достаточно часто на практике мембранного разделения встречаются аппараты, модули которых состоят из трубчатых каналов с пористыми стенками. Физическая картина течения в рассматриваемых каналах показана на рисунке 1. Предполагается, что течение жидкости происходит в круглом канале радиуса R и длины L . Скорость подачи жидкости в канал равна некоторому, заранее заданному значению W_{in} , через проницаемую границу осуществляется равномерный отсос со скоростью q .

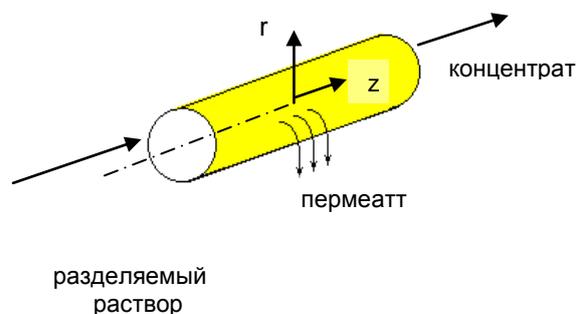


Рис. 1. Схема процесса мембранной фильтрации

Кроме практической значимости интерес к задаче обусловлен наличием еще ряда причин. Во-первых, имеется точное решение уравнений Навье – Стокса при $Re \rightarrow \infty$ [2]. Во-вторых, расчеты такого течения были выполнены другими исследователями (см, например, работу [3]). Совместная гидродинамическая и массообменная задачи решены в работах [4 – 6].

Таким образом, есть возможность сравнения результатов, полученных качественно

различными методами. Необходимо отметить, что основной целью рассмотрения сформулированной задачи в настоящей работе, является оценка эффективности метода, изложенного в [1], при расчете гидродинамики и массообмена в мембранных каналах.

Допущения, в рамках которых проводится исследование, таковы:

1. Жидкость несжимаема, то есть ее массовая плотность ρ постоянна, без потери общности будем считать, что $\rho=1$;
2. Эффективная вязкость μ постоянна;
3. Жидкость, текущая в осевом направлении и через пористую границу однородна;
4. Осевая скорость жидкости на входе максимальна;
5. Гравитационные, электрические, магнитные и др. поля пренебрежимо малы;
6. Концентрация частиц мала.

Введем в рассмотрение цилиндрическую систему координат (z, r) , ось z которой совпадает с осью трубы (см. рисунок 1). Для исследования поставленной задачи в цилиндрических координатах необходимо решить систему безразмерных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \omega \right) = \\ = \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \omega \right), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = r \omega, \\ \operatorname{Re} \cdot \operatorname{Pr} \left(w \frac{\partial \sigma}{\partial z} + v \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial r}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $r w = \frac{\partial \psi}{\partial r}$, $r v = -\frac{\partial \psi}{\partial z}$, $\omega = \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z}$ – дифференциальные операторы функция тока и завихренность соответственно,

w и v – компоненты вектора скорости в продольном и радиальном направлениях,

$\operatorname{Re} = \tilde{\rho} \tilde{q}_- \tilde{R} / \tilde{\mu}$ – характерное число Рейнольдса, вычисленное по радиусу канала,

$\sigma = \frac{\tilde{c}}{\tilde{c}_{ax}}$ – безразмерная концентрация,

используемая вместо \tilde{c} (\tilde{c}_{ax} – значение концентрации на входе в канал), другие переменные в системе (1) безразмерены масштабами \tilde{R} и \tilde{q}_- , символ « \sim » соответствует размерным переменным.

Как видно из постановки задачи, решение зависит от безразмерных параметров L , Re , Pr .

Особенности постановки граничных условий состоят в следующем:

$$\psi = \int_0^r W_{in} r dr$$

Входное отверстие: $\psi = \int_0^r W_{in} r dr$, где W_{in} – скорость жидкости на входе в канал, $\sigma=1$, $v=0$, $w=W_{in}$;

На проницаемой границе $\psi = \psi(0, R) - q_- R z$, значения ω вычисляются в процессе решения с использованием условия

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0, \quad v=1;$$

прилипания $w=0$;

Выходное отверстие: значения всех искомых переменных вычисляются экстраполяцией из расчетной области в предположении отсутствия продольной диффузии;

Ось симметрии: значения ψ , ω , v полагаются равными нулю,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0$$

Решение задачи проводилось методом, предложенным в работе [1], на ортогональных равномерных по обеим осям координат сетках размерами от 21×11 до 61×31 .

Удовлетворительная скорость сходимости итерационного процесса была достигнута за счет организации релаксационного циклического процесса с параметрами Чебышева для функции тока ψ .

В процессе вычислений было найдено распределение скоростей и концентраций в поле течения, исследовано влияние геометрии канала и физических характеристик жидкости на распределение полей переменных. Кроме того, полученное решение контролировалось на согласованность известным приближенным и аналитическому решениям. Результаты численного решения представлены ниже, на рисунках 2 – 6.

На рисунках 2 и 3 линиями тока и векторным полем скоростей представлена типичная структура течения в рассматриваемом канале при следующих значениях параметров: $R=1$, $L=5$, $\operatorname{Re}=1$, $\operatorname{Pr}=1000$.

В ходе численного эксперимента установлено, что кинематика рассматриваемого течения консервативна в широком диапазоне чисел Рейнольдса отсоса: $[0, 1, 10]$. Кроме того, влияние геометрических параметров канала на распределение полей гидродинамических переменных и концентрацию незначительно.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ И МАССООБМЕНА В ТРУБЧАТОМ МЕМБРАННОМ КАНАЛЕ

При возрастании числа Рейнольдса от-соса профиль продольной скорости удовлетворительно согласуется с точным решением [7]. Отмеченные факты отражены на рисунках 4 и 6, где в четырех различных сечениях по

соответствует значению продольной скорости при $r=0$, штриховой линией на рисунке 4 показано точное (при $Re \rightarrow \infty$) решение [8].

В процессе анализа зависимостей была обнаружена согласованность полученного

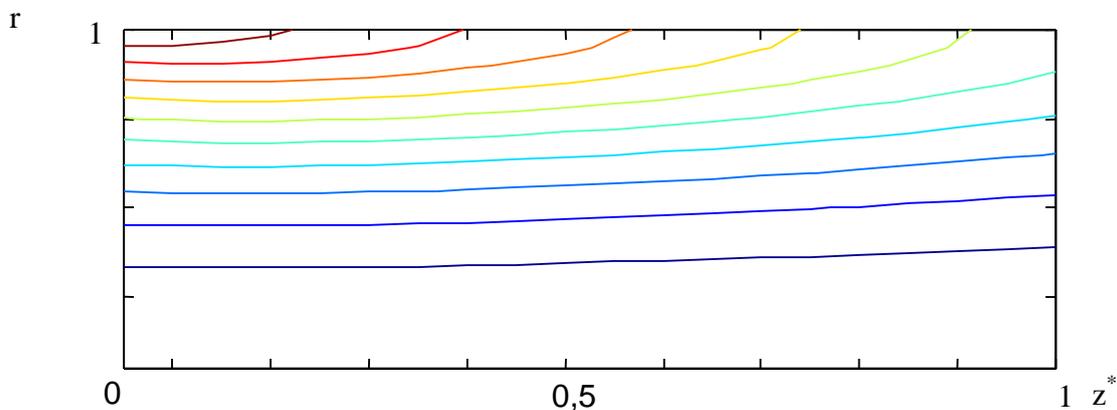


Рис. 2. Линии тока в трубчатом мембранном канале; $Re=1$, $Pr=1000$, $L=5$

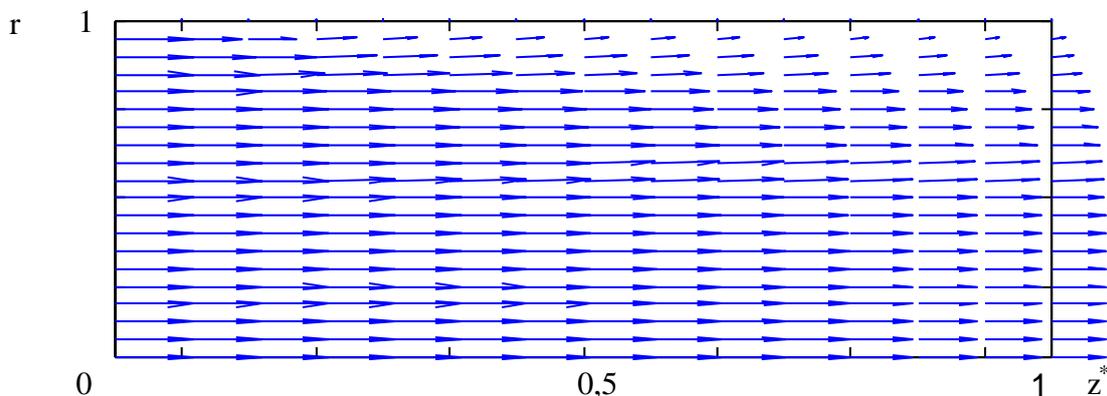


Рис. 3. Векторное поле скоростей в трубчатом мембранном канале;
 $Re=1$, $Pr=1000$, $L=5$

оси z ($z=0,2L$, $z=4L$, $z=0,6L$, $z=0,8L$, метки 1, 2, 3, 4 соответственно) представлены зависимости $w^*(r)$ для двух значений числа Рейнольдса: 0,1 и 10. Здесь $w^*=w/w_{max}$, w_{max}

решения с расчетными результатами, известными из работы [3] (обозначены символом "o" на рисунке 4) и экспериментальными данными, полученные в [9] (метка Δ).

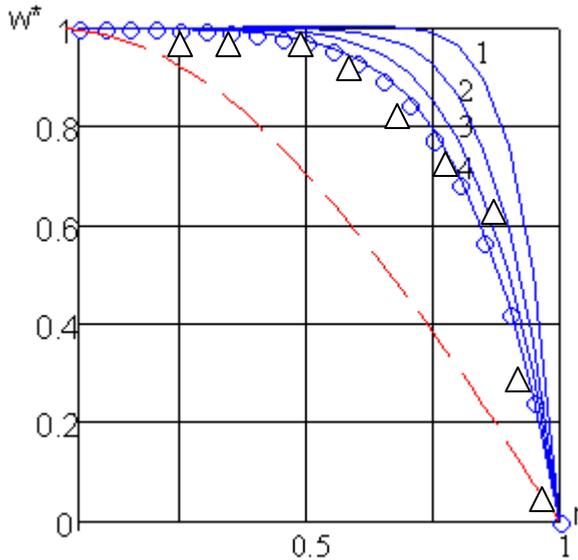


Рис. 4. Зависимость w-компоненты вектора скорости от высоты трубчатого напорного канала, $Re=0,1$, $Pr=1000$, $L=5$

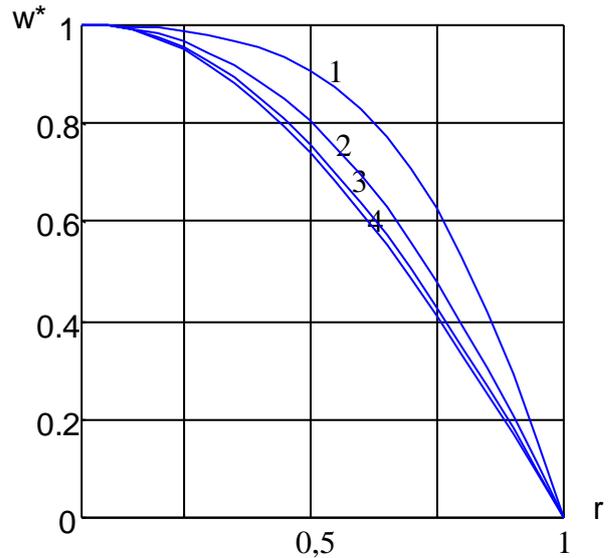


Рис. 6. Зависимость w-компоненты вектора скорости от высоты трубчатого напорного канала, $Re=10$, $Pr=1000$, $L=5$

На рисунке 5 сплошной линией показан график обобщенной зависимости средней по поперечному сечению концентрации от длины напорного канала, здесь же знаком "o" отмечено решение, известное из работы [10], полученное вариационным методом. Как видно из рисунка, между зависимостями существует удовлетворительное соответствие. Максимальное расхождение результатов составляет 7%.

В процессе численного моделирования установлено, что наибольшее влияние на

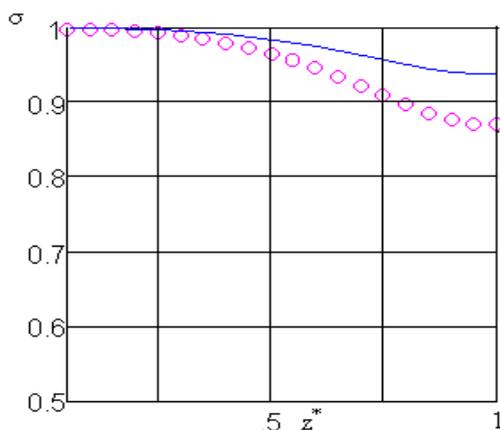


Рис. 5. Обобщенная зависимость средней по поперечному сечению концентрации примеси от длины напорного канала

поле концентрации оказывает значение числа Прандтля Pr . Исследования проводились при значениях числа Прандтля из диапазона [10, 1000]. Вместе с тем, как показали результаты расчетов, зависимость безразмерной концентрации от значений числа Рейнольдса Re практически отсутствует. При значениях $Re = 0,1, 1, 10$ отмечено относительное совпадение профилей безразмерной концентрации.

Представленные результаты позволяют анализировать изменение любого параметра процесса разделения, включенного в модель (1), а также доказывают эффективность использования метода [1] при расчете мембранных процессов. Указанный численный метод [1] открывает широкие возможности для физико-математического моделирования технологических процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Госмен А.Д., Пан В.М., Ранчел А.К., Сполдинг Д.Б., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости: пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 324 с.
2. Yuan S.W., Finkelstein A.B. Laminar pipe flow in channels with injection and suction through a porous wall//Transactions of the ASME. 1956. V. 78.- P. 719.
3. Чесноков Ю.Г., Марцулевич Н.А. Ламинарное движение жидкостей в мембранных волокнах // Жур. приклад. химии. 1989. №9. - С. 1954-1961.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ И МАССООБМЕНА В ТРУБЧАТОМ МЕМБРАННОМ КАНАЛЕ

4. Марцулевич Н.А., Чесноков Ю.Г. Моделирование процесса ультрафильтрации в мембранных каналах круглого сечения при гелеобразовании// Жур. приклад. химии. 1989. №9. - С. 1950-1954.
5. Марцулевич Н.А., Гомолицкий В.Н., Чесноков Ю.Г., Смирнов Н.Н. Гидродинамика мембранных аппаратов с полыми волокнами// Жур. приклад. химии. 1989. №3. - С. 578 – 580.
6. Китавцев Д.Н., Протождяконов И.О., Чесноков Ю.Г. Исследование стационарного режима ультрафильтрации с образованием гелеобразного осадка// Жур. приклад. химии. 1995. Т. 68. № 4. - С. 658 – 662.
7. Oseen C.W. Arkiv för Mat., №22, 1927.
8. Yuan S.W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls//J. of applied physics/ 1956. V. 27. № 3. - P. 267.
9. Wageman W.E., Guevara F.A. Fluid flow through a porous channels// Physics Fluids. 1960. V. 3. - P. 878 – 881.
10. Гуцалюк В.М. Вариационные методы в решениях задач мембранной технологии. - К.: Выща школа, 1991. – 59 с.