

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКИХ СРЕД В ПРОНИЦАЕМЫХ КАНАЛАХ ФИЛЬТРОВ

С.А. Светлов, Л.В. Китаева

Исследованы трёхмерные течения жидких сред в проницаемых каналах фильтров прямоугольного и квадратного поперечного сечений на основе уравнений гидродинамики. Рассмотрена математическая модель течения жидкости в напорном канале на основе уравнения неразрывности. Используя математические модели течения жидкости в каналах, определены профили скорости жидкости в напорном и дренажном каналах фильтра. В случае предельно низких значений характерного числа Рейнольдса сформулирована автомодельная задача и получена определяющая система дифференциальных уравнений в частных производных.

Каналы с проницаемыми стенками широко используются в химическом оборудовании и технологиях, в частности в установках для очистки жидкостей и газов от вредных примесей, в системах концентрирования различных химических и пищевых продуктов. Кроме этого, каналы с проницаемыми стенками и математическое описание процессов гидродинамики являются хорошей физико-математической моделью при изучении течения сред в каналах зарядов ракетных двигателей на твердом топливе (РДТТ) при горении топлива.

Для математического описания движения жидкой среды в гидродинамике широко используют упрощенные модели среды и отдельных явлений [1]. Дифференциальное уравнение движения совместно с начальными и граничными условиями полностью определяет задачу определения скорости жидкости в сечении каналов фильтра. Основные методы решения дифференциального уравнения движения изложены в работах [2–5].

Рассмотрим течения жидких сред в напорном и дренажном каналах фильтра, образующая поверхности фильтрующего элемента которого является прямой линией, а поперечное сечение элемента представляет собой прямоугольник. На рисунке 1 представлена схема фильтра с расположенными внутри корпуса 1 фильтрующими элементами 2. Течения в корпусе фильтра образованы подачей жидкости с постоянной скоростью через отверстие, расположенное в крышке 3 фильтра и решётку 4, распределяющую входной поток по сечению корпуса.

Для описания данного течения рассмотрим слой толщиной Δz . Схема поперечного сечения фильтра представлена на рисунке 2.

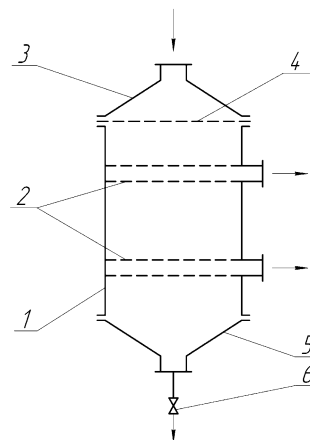


Рис. 1. Схема фильтра:
1 – корпус; 2 – фильтрующий элемент; 3 – крышка; 4 – решётка; 5 – днище; 6 – вентиль

Так как $\Delta z \rightarrow 0$, то вращение частиц жидкости вокруг оси Oz отсутствует, течение можно считать потенциальным. Потенциальное течение описывается уравнением неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где u, v, w – компоненты вектора скорости \bar{V} в декартовой системе координат вдоль осей x, y, z , соответственно.

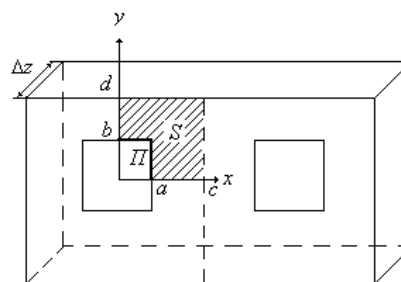


Рис. 2. Схема поперечного сечения напорного и дренажного каналов фильтра

В силу постоянства скорости подачи жидкости можно полагать

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Тогда из уравнения (1) и следует, что

$$w = z \cdot W(x, y).$$

Проведем осреднение компонентов вектора скорости по длине канала Δz . Обозначим

$$U = \int u \cdot dz, \quad V = \int v \cdot dz, \quad W_{cp} = \int \frac{\partial w}{\partial z} \cdot dz \quad (2)$$

где W_{cp} – средняя скорость потока жидкости в направлении координаты z .

Так как компоненты вектора скорости u и v являются функциями координат x и y , то из соотношений (2) следует, что

$$U \approx u \cdot \Delta z, \quad V \approx v \cdot \Delta z. \quad (3)$$

Проинтегрировав уравнение (1) по Δz получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + W_{cp} = 0. \quad (4)$$

Исходя из постоянства расхода жидкости

$$W_{cp} \cdot S = q \cdot \Pi \cdot \Delta z,$$

откуда

$$W_{cp} = q \frac{\Pi}{S} \Delta z, \quad (5)$$

где S – площадь внешней части канала, m^2 ;

Π – периметр фильтрующего канала, m ;

q – нормальная к стенке фильтрующего канала компонента вектора скорости (скорость подачи жидкости через поверхность фильтрующего элемента), m/c .

Тогда из (4) с учетом (5) получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = -q \frac{\Pi}{S} \Delta z,$$

или, учитывая (3)

$$\Delta z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -q \frac{\Pi}{S} \Delta z. \quad (6)$$

Приведем уравнение (6) к безразмерному виду, нормируя координаты x и y на ширину c и высоту d напорного канала, соответственно, координату z на величину $L = S / \Pi$, а скорость по соотношению

$$\tilde{v} = \frac{\bar{V}}{q}.$$

Тогда выражение (6) в безразмерном виде будет иметь вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{d} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} = - \left(\frac{1}{L} \right)^2. \quad (7)$$

Будем полагать, что уравнение (1) представляет собой необходимое и достаточное условие потенциальности поля скоростей, то

есть существует скалярная функция φ – потенциал скорости, такая, что

$$\tilde{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \tilde{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Условие потенциальности приводит к значительным упрощениям. Прежде всего, скорость вполне определяется потенциалом, так что вместо векторной искомой функции \bar{V} достаточно найти скалярную функцию φ . Тогда вместо уравнения (7) получим уравнение

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{d^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = - \left(\frac{a+b}{c \cdot d - a \cdot b} \right)^2. \quad (8)$$

Граничные условия для поставленной задачи следующие:

– на внешних стенках канала:

$$\tilde{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ для } x \in \langle 0, c \rangle,$$

$$\tilde{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ для } y \in \langle 0, d \rangle;$$

– на внутренних стенках канала:

$$\tilde{u} = -1 \text{ для } x \in \langle 0, a \rangle,$$

$$\tilde{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ для } y \in \langle 0, b \rangle;$$

– на оси симметрии Ox :

$$\tilde{v} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ для } x \in \langle a, c \rangle;$$

– на оси симметрии Oy :

$$\tilde{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ для } y \in \langle b, d \rangle.$$

Решение уравнения (8) проводилось с использованием конечно – разностной аппроксимации, основные этапы которой таковы:

- выбор конечного числа точек в поле течения, играющих роль узлов сетки;
- сведение дифференциальных уравнений к системе совместных конечно-разностных уравнений, связывающих значения переменной в каждом узле сетки с её значениями в соседних узлах, преобразование этих уравнений к виду, удобному для решения итерационным методом последовательных смещений;
- визуализация и интерпретация результатов моделирования.

Для решения уравнения Пуассона (8) использовалась ортогональная равномерная сетка, для построения которой ширину c и высоту d разделим соответственно на N_c и N_d частей так, чтобы $N_c = k \cdot c$, $N_d = k \cdot d$,

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКИХ СРЕД В ПРОНИЦАЕМЫХ КАНАЛАХ ФИЛЬТРОВ

где k – любое целое неотрицательное число. Через полученные точки разбиения построим ортогональную сетку и для каждой её внутренней точки запишем разностное уравнение. В результате получается система линейных алгебраических уравнений для искомой функции в узлах сетки. Она замыкается граничными условиями в конечно-разностном виде. Полученная система уравнений решалась методом Гаусса-Зейделя, который в применении к эллиптическим разностным уравнениям называется методом последовательных смещений (или ускоренным методом Либмана).

Расчетный алгоритм реализован в виде программы на алгоритмическом языке MAPLE 6 R5. Его достоинствами являются: высокое быстродействие и устойчивость. Обработка результатов проводилась средствами пакета MAPLE 6.

По результатам проведенного исследования проанализируем влияние, которое оказывают геометрические размеры и форма проницаемой границы мембранного канала на распределение скорости во внешней части канала, а также влияние размеров сетки на точность решения рассматриваемой задачи. На рисунках 3–5 показана типичная картина течения в напорном канале фильтра при различных соотношениях размеров напорного (c, d) и дренажного (a, b) каналов (рис. 2).

В ходе эксперимента было обнаружено, что линейные размеры напорного канала фильтра прямоугольного поперечного сечения не оказывают влияния на распределение скорости во внешней части фильтрующего канала и структура течения качественно одинакова. Изменение размеров сетки влияет на время решения задачи, при этом на форму линий тока не влияет.

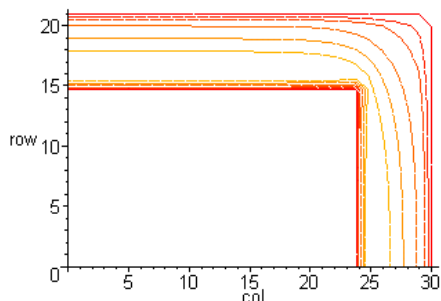


Рис. 3. Картина течения в напорном канале фильтра при $a = 24, b = 15, c = 30, d = 22$

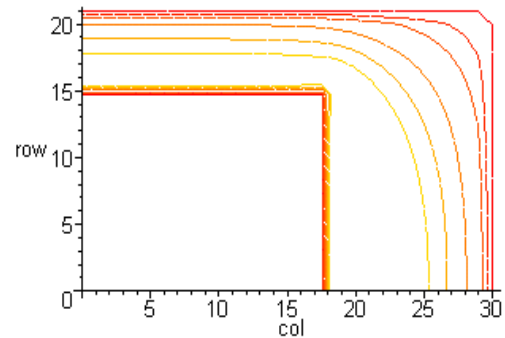


Рис. 4. Картина течения в напорном канале фильтра при $a = 18, b = 15, c = 30, d = 22$

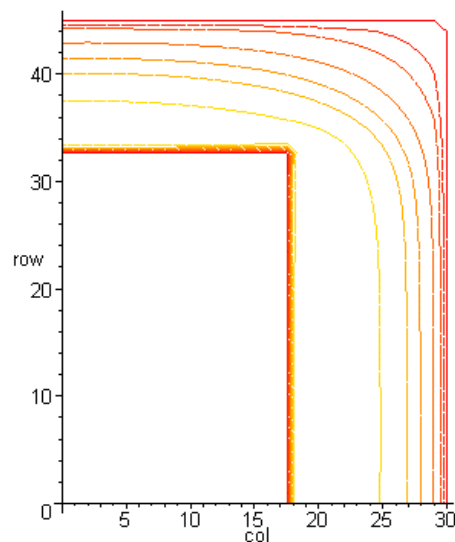


Рис. 5. Картина течения в напорном канале фильтра при $a = 18, b = 33, c = 30, d = 45$

Рассмотрим задачу о течении жидкости внутри фильтрующего канала. Известно [6, 7], что такое течение описывается системой уравнений в декартовой системе координат в безразмерных переменных в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + Re^{-1} \Delta u \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + Re^{-1} \Delta v \\ u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + Re^{-1} \Delta w \end{cases}, \quad (9)$$

где u, v и w – компоненты вектора скорости \vec{V} вдоль осей x, y и z , соответственно;

p – давление жидкости;

Re – число Рейнольдса;

Δ – оператор Лапласа.

Граничные условия для решения системы уравнений (9) следующие:

- полагаем, что в начале канала, при $z = 0$: $w = 0$;
- на оси симметрии ($x = 0, y = 0$):

$$u = v = 0 = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y};$$
- на проницаемых стенках канала:
 $q = -1$.

Известно [6, 7], что решение системы в размерных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y), \\ w &= z \cdot W(x, y). \end{aligned}$$

Если число Рейнольдса $Re \rightarrow 0$, то система уравнений (9) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \\ W = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \end{cases} \quad (10)$$

Первое и второе уравнение полученной системы уравнений (10) представляют собой уравнения Лапласа для u и v компонент вектора скорости, каждое из которых решалось методом Гаусса-Зейделя. По найденным значениям u и v из третьего уравнения системы легко можно найти W . Результаты полученного решения приведены на рисунках 6 и 7.

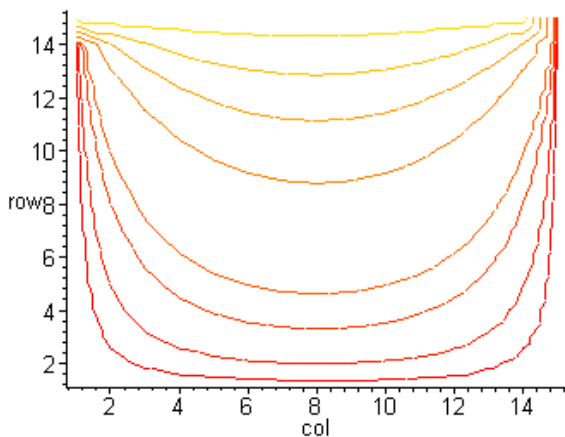


Рис. 6. Картина изолиний для компоненты v – составляющей вектора скорости \bar{V}

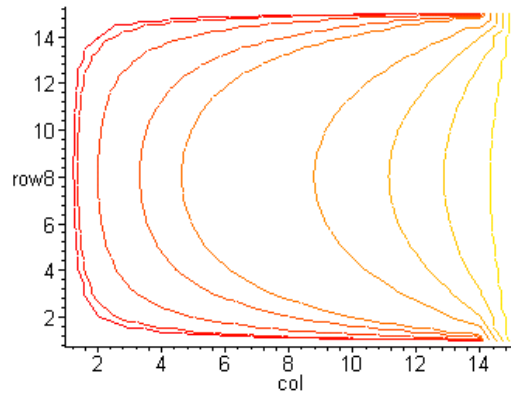


Рис. 7. Картина изолиний для компоненты u – составляющей вектора скорости \bar{V}

Линейные размеры напорного канала прямоугольного поперечного сечения не оказывают влияния на распределение скорости во внешней части фильтрующего канала и структура течения качественно одинакова. В случае предельно низких значений характерного числа Рейнольдса ($Re \rightarrow 0$) сформулирована автомодельная задача, получена определяющая система дифференциальных уравнений в частных производных. Показано, что кинематика течения жидкости $\{u, v, W\}$ не зависит от вязкости среды.

Построены картины изолиний для компонент вектора скорости течения жидкости в дренажном канале при $Re \rightarrow 0$. По мере удаления от начала координат контуры продольной компоненты вектора скорости более напоминают дуги окружностей. Вблизи центра канала течение жидкости стремится к осесимметричному.

ЛИТЕРАТУРА

1. Темцев Б.Т. Техническая гидромеханика. – М.: Машиностроение, 1978. – 463 с.
2. Владимиров В.В. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.
3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Учебник. Т.1. – М.: Наука, 1970. – 440 с.
5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
6. Светлов С.А., Китаева Л.В. Трёхмерные течения жидких сред в проницаемых каналах // Ползуновский вестник. – 2007. – № 3. – С. 113-121.
7. Taylor C.L., Banks W.H.H., Zaturka M.B., Drazin P.G. Three-dimensional flow in a porous channel // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1991. – V. 44. – P. 105-133.