СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В.С.Попович А.Е.Зимин

Представлены алгоритмы метода расчета. Рассмотрен численный пример в сравнении и дана оценка при применении приведенных методов.

Свободные крутильные колебания валопровода можно описать системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} I_1 \dfrac{d^2\varphi_1}{dt^2} - C_{1,2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \\ I_2 \dfrac{d^2\varphi_2}{dt^2} + C_{1,2}(\varphi_2 - \varphi_1) - C_{2,3}(\varphi_3 - \varphi_2) = 0 \\ \ldots\ldots \\ I_{n-1} \dfrac{d^2\varphi_{n-1}}{dt^2} + C_{n-2,n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) - C_{n-1,n}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = 0 \\ I_n \dfrac{d^2\varphi_n}{dt^2} + C_{n-1,n}(\varphi_n - \varphi_{n-1}) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

где: $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ - углы поворота сосредоточенных масс;

$I_1 \ldots I_n$ - моменты инерции сосредоточенных масс;

$c_{1;2} \ldots c_{n-1;n}$ - жесткости упругих участков.

Существует несколько методов расчета частот таких колебаний. Наиболее распространенные из них – методы Толле, Терских и Хольцера.

Практические способы нахождения частот и форм собственных колебаний крутильных многомассовых систем в большинстве основаны на решении системы уравнений путем последовательных подстановок пробных значений собственной частоты ω.

Общий алгоритм поиска решения:

$\omega = step; R1 = \text{ìåòîä}\ \ (\omega)$

Пока $\omega < M$

{

$\omega = \omega + step; R = \text{ìåòîä}\ \ (\omega)$

Если $R1 \cdot R < 0$ и $|R1 - R| < K$ то

между $\omega - step$ и ω находится собственная частота

}

Здесь $метод(\omega)$ – один из методов оценки степени неточности выбора ω (см. ниже); $step$ - шаг изменения частоты ω; M - максимальная частота, до которой имеет смысл производить расчет; K - используется для отсечения разрывов функции $\text{ìåòîä}\ \ (\omega)$. Имеет смысл (вместе с выражением $|R1 - R| < K$) только для метода Терских.

Метод Толле основан на равенстве нулю суммы моментов сил упругости и сил инерции масс системы при собственных колебаниях.

Обозначая моменты сил упругости участков вала через $M_{1;2}, M_{2;3}, \ldots, M_{n-1;n}$, а относительные амплитуды угловых колебаний масс через $a_1, a_2, \ldots, a_n$, из системы дифференциальных уравнений получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} M_{1;2} = -I_1 a_1 \omega^2; a_2 = a_1 + \dfrac{M_{1;2}}{c_{1;2}} \\ M_{2;3} = M_{1;2} - I_2 a_2 \omega^2; a_3 = a_2 + \dfrac{M_{2;3}}{c_{2;3}} \\ \ldots\ldots \\ M_{n-1;n} = M_{n-2;n-1} - I_{n-1} a_{n-1} \omega^2; a_n = a_{n-1} + \dfrac{M_{n-1;n}}{c_{n-1;n}} \end{cases} \qquad (2)$$

Если произвольно заданная величина ω будет равна искомой частоте собственных колебаний системы, то участок n,n+1 не будет деформирован, т. е. $M_{n,n+1} = 0$, как и $M_{0,1} = 0$. При неудачном выборе значения ω на участок n,n+1 действует некоторый остаточный момент $M_{n,n+1} = R$. Величина R характеризует меру неточности принятой величины ω. Проведя несколько пробных определений остаточного момента, находят то значение ω, при котором R=0.

На графике $R(\omega)$ (рисунок 1) хорошо видно быстро растущую амплитуду колебаний остаточного момента в зависимости от частоты.

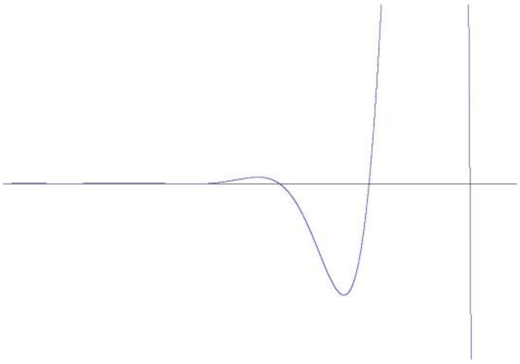

Рис. 1. Кривая остаточного момента

Алгоритм метода Толле для одного шага вычислений (Нахождение остаточного момента при заданном значении ω):

Пусть М – момент сил упругости на вычисляемом участке (нам не нужны все моменты для расчета собственных частот), i – номер обсчитываемой массы

Функция Толле (ω)

{

$a_1 = 1; M = -I_1 \cdot \omega^2; i = 2$

Пока $i <= n$

{

$$a_i = a_{i-1} + \frac{M}{C_{i-1,i}}$$

$$M = M - I_i \cdot a_i \cdot \omega^2$$

$$i = i + 1$$

}

Вернем значение М

}

Мы получили остаточный момент в переменной М.

Машинная сложность данного метода для одного шага вычислений:

$N = 5 + \sum_{i=1}^{n} 11$ действий.

Пример:

Пусть имеем 3-х массовую систему:

$I_1 = 0.47, I_2 = 0.232, I_3 = 0.8;$

$C_{1,2} = 14000, C_{2,3} = 5500000$

Посчитаем 1 шаг вычислений для $\omega = 208.5$:

	$a_1 = 1; M = -I_1 \cdot \omega^2 = -2073.2028; i = 2$
$i = 2$	$a_2 = a_1 + \frac{M}{C_{1,2}} = -0.4552$
$i = 2$	$M = M - I_2 \cdot a_2 \cdot \omega^2 = -15795.167$
$i = 2$	$i = i + 1$
$i = 3$	$a_3 = a_2 + \frac{M}{C_{2,3}} = -0.4581$
$i = 3$	$M = M - I_3 \cdot a_3 \cdot \omega^2 = 90.7505$
$i = 3$	$i = i + 1$
$i = 4$	Расчет окончен

Достоинством данного метода является простота его реализации и сравнительно низкая машинная сложность. Недостатком метода является быстрый рост колебаний значений R, что предъявляет повышенные требования к разрядности чисел с плавающей точкой.

Метод В.П.Терских (метод цепных дробей) состоит в решении уравнения в виде цепной дроби с помощью пробных подстановок. Сущность этого метода заключается в определении величины эквивалентной динамической жесткости с помощью цепной дроби.

$$\begin{cases} -\frac{M_{1;2}}{a_1} = \frac{I_1 a_1 \omega^2 - M_{0;1}}{a_1} = I_1 \omega^2 \\ \frac{a_2}{M_{1;2}} = \frac{M_{1;2}\frac{1}{c_{1;2}} + a_1}{M_{1;2}} = \frac{1}{c_{1;2}} + \frac{a_1}{M_{1;2}} = \frac{1}{c_{1;2}} - \frac{1}{I_1 \omega^2} \\ \frac{M_{2;3}}{a_2} = \frac{I_2 a_2 \omega^2 - M_{1;2}}{a_2} = I_2 \omega^2 + \frac{M_{1;2}}{a_2} = I_2 \omega^2 - \cfrac{1}{\frac{1}{c_{1;2}} - \frac{1}{I_1 \omega^2}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -\frac{M_{n,n-1}}{a_n} = I_n \omega^2 - \cfrac{1}{\cfrac{1}{c_{n-1,n}} - \cfrac{1}{I_{n-1}\omega^2 - \cfrac{1}{\cfrac{1}{c_{n-2;n-1}} - \cfrac{1}{\cfrac{1}{c_{1;2}} - \cfrac{1}{I_1 \omega^2}}}}} \end{cases} \quad (3)$$

При частоте собственных колебаний $M_{n,n+1} = 0$. Следовательно, частотное уравнение для n-массовой системы получается путем приравнивания нулю упругого момента за последней массой:

$$I_n \omega^2 - \cfrac{1}{\cfrac{1}{c_{n-1,n}} - \cfrac{1}{I_{n-1}\omega^2 - \cfrac{1}{\cfrac{1}{c_{n-2;n-1}} - \cfrac{1}{\cfrac{1}{c_{1;2}} - \cfrac{1}{I_1 \omega^2}}}}} = 0 \quad (4)$$

На графике $M(\omega)$ (рисунок 2) видна возможность пропустить собственную частоту при большом шаге по частоте.

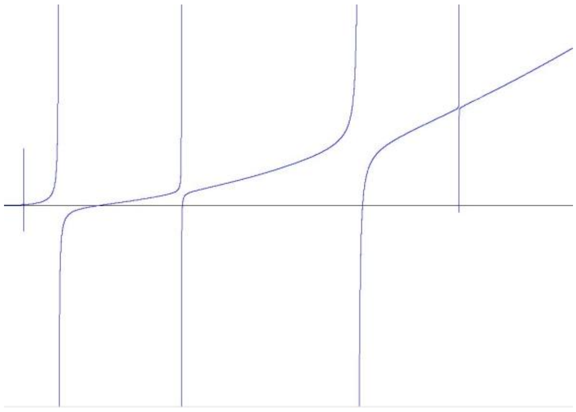

Рис. 2. К определению частот разветвленной системы

Алгоритм Метода Терских для одного шага вычислений:

Значение i зададим равным количеству масс в системе.

Функция Терских (φ, i)

{

Если $i=1$ то $M = I_1 \cdot \omega^2$

иначе

$$M = I_i \cdot \omega^2 - \frac{1}{\dfrac{1}{C_{i-1,i}} - \dfrac{1}{\text{Òåðñêèõ}(\omega, i-1)}}$$

Вернем значение М

}

Функция рекурсивна, т.е. она вызывает себя.

Машинная сложность данного метода для одного шага вычислений при рекурсивном алгоритме:

$N = 4 + \sum_{i=2}^{n} 15$ действий.

Пример:

Возьмем такую же систему, как и для метода Толле и посчитаем для $\omega = 208.5$

$i=3$	Вызов $\text{Òåðñêèõ}(\omega,2)$
$i=2$	Вызов $\text{Òåðñêèõ}(\omega,1)$
$i=1$	$M = I_1 \cdot \omega^2 = 20343.857$
$i=1$	Вернем М
$i=2$	$M = I_2 \cdot \omega^2 - \dfrac{1}{\dfrac{1}{C_{1,2}} - \dfrac{1}{M}} = -34853.956$
$i=2$	Вернем М
$i=3$	$M = I_3 \cdot \omega^2 - \dfrac{1}{\dfrac{1}{C_{2,3}} - \dfrac{1}{M}} = -6.63204$
$i=3$	Вернем М; Расчет окончен

К достоинствам данного метода можно отнести простоту реализации рекурсивным способом и легкостью проверки правильности решения. Недостатками метода является появление «ложных» решений, когда в момент прохождения через 0 значения уравнения функция прерывается. Кроме того, с ростом частоты ω требуется уменьшать шаг вычислений, чтобы не пропустить решения.

Метод Хольцера. Решение дифференциальных уравнений свободных крутильных колебаний можно найти в виде:

$$\varphi_i = a_i \cos \omega_c t \qquad (5)$$

После дифференцирования (5) и подстановки в систему уравнений для заданной частоты колебаний получим:

$$\begin{cases} -I_1 a_1 \omega_c^2 + c_{1;2}(a_1 - a_2) = 0 \\ -I_2 a_2 \omega_c^2 - c_{1;2}(a_1 - a_2) + c_{2;3}(a_2 - a_3) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -I_i a_i \omega_c^2 - c_{i-1;i}(a_{i-1} - a_i) + c_{i;i+1}(a_i - a_{i+1}) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -I_n a_n \omega_c^2 - c_{n-1;n}(a_{n-1} - a_n) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Так как значения моментов инерции и жесткостей участков отличаются на несколько порядков, эти уравнения удобно для проведения расчетов записывать в относительных величинах:

$$\begin{cases} -I'_1 a'_1 (\omega'_c)^2 + c'_{1;2}(a'_1 - a'_2) = 0 \\ -I'_2 a'_2 (\omega'_c)^2 - c'_{1;2}(a'_1 - a'_2) + c'_{2;3}(a'_2 - a'_3) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -I'_i a'_i (\omega'_c)^2 - c'_{i-1;i}(a'_{i-1} - a'_i) + c'_{i;i+1}(a'_i - a'_{i+1}) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -I'_n a'_n (\omega'_c)^2 - c'_{n-1;n}(a'_{n-1} - a'_n) = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

где $a'_i = a_i / a_1 ; I'_i = I_i / I_1 ; c'_i = c_i / c_1 ; \omega'_c = \omega_c / \omega_1 ; \omega_1 = \sqrt{c_1 / I_1}$

Выражая значение a'_2 из первого уравнения системы и затем, подставляя его в третье уравнение, выражая a'_3, и т. д., систему уравнений можно привести к виду

$$\begin{cases} a_2 = a_1 - \dfrac{\omega_c^2}{c_{1;2}} I_1 a_1 \\ a_3 = a_2 - \dfrac{\omega_c^2}{c_{2;3}} (I_1 a_1 + I_2 a_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_i = a_{i-1} - \dfrac{\omega_c^2}{c_{i-1;i}} (I_1 a_1 + I_2 a_2 + \ldots + I_{i-1} a_{i-1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = a_{n-1} - \dfrac{\omega_c^2}{c_{n-1;n}} \sum_{i=1}^{n-1} I_i a_i \end{cases} \qquad (7)$$

Условие $\sum_{i=1}^{n} I_i a_i = 0$ (8)

будет являться критерием правильности определения форм колебаний при заданной частоте.

Принимая $a_1 = 1$ при заданной частоте колебаний ω_c, определяют значение a_2 из первого уравнения системы. Затем значение a_2 подставляют во второе уравнение и находят a_3. Проведя эти операции до последнего уравнения, проверяют правильность решения по условию.

Алгоритм Метода Хольцера для одного шага вычислений:

Перед началом вычислений рассчитаем относительные значения:

$i = 1$

Пока $i <= n$

{

Если $i < n$ то $C_i' = \dfrac{C_{i,i+1}}{C_{1,2}}$

$I_i' = \dfrac{I_i}{I_1}$

$i = i + 1$

}

Для каждого шага:

Функция Хольцера (ω')

{

$a_1 = 1;\ sum = 0;\ i = 2$

Пока $i <= n$

{

$sum = sum + a_{i-1} \cdot I_{i-1}'$

$a_i = a_{i-1} - \dfrac{\omega'^2 \cdot sum}{C_{i-1}'}$

$i = i + 1$

}

$i = 1;\ sum = 0$

Пока $i <= n$

{

$sum = sum + a_i \cdot I_i'$

$i = i + 1$

{

Вернем значение sum

}

После вычисления функции Хольцера от ω', найдем значение ω:

$$\omega = \omega' \cdot \sqrt{\frac{C_{1,2}}{I_1}}$$

Машинная сложность данного метода для одного шага вычислений:

$N = 9 + \sum_{i=2}^{n} 10 + \sum_{i=1}^{n} 6$ действий.

Пример:

Возьмем такую же систему, как и для метода Толле.

Предварительные расчеты (относительные значения):

	$i = 1$
$i = 1$	$C_1' = \dfrac{C_{1,2}}{C_{1,2}} = 1$
$i = 1$	$I_1' = \dfrac{I_1}{I_1} = 1$
$i = 1$	$i = i + 1$
$i = 2$	$C_2' = \dfrac{C_{2,3}}{C_{1,2}} = 392.857$
$i = 2$	$I_2' = \dfrac{I_2}{I_1} = 0.4936$
$i = 2$	$i = i + 1$
$i = 3$	$I_3' = \dfrac{I_3}{I_1} = 1.7021$
$i = 3$	$i = i + 1$

Посчитаем один шаг для $\omega' = 0.92$

	$a_1 = 1; sum = 0; i = 2$
$i = 2$	$sum = sum + a_1 \cdot I_1' = 1$
$i = 2$	$a_2 = a_1 - \dfrac{\omega'^2 \cdot sum}{C_1'} = 0.1536$
$i = 2$	$i = i + 1$
$i = 3$	$sum = sum + a_2 \cdot I_2' = 1.0758$
$i = 3$	$a_3 = a_2 - \dfrac{\omega'^2 \cdot sum}{C_2'} = 0.1513$
$i = 3$	$i = i + 1$
	$i = 1; sum = 0$
$i = 1$	$sum = sum + a_1 \cdot I_1' = 1$
$i = 1$	$i = i + 1$
$i = 2$	$sum = sum + a_2 \cdot I_2' = 1.0758$
$i = 2$	$i = i + 1$
$i = 3$	$sum = sum + a_3 \cdot I_3' = 1.3333$
$i = 3$	$i = i + 1$
	Вернем sum; Расчет окончен

Теперь найдем значение ω:

$$\omega = \omega' \cdot \sqrt{\frac{C_{1,2}}{I_1}}$$

Данный метод является наиболее сложным в реализации на ЭВМ из-за большого количества преобразований. Машинная сложность данного метода также самая высокая из представленных в данной статье методов. Кроме того, этот метод содержит все недостатки метода Толле. Поведение функции-решения сходно с поведением функции-решения для метода Толле.

В заключение следует отметить, что из рассмотренных в данной статье методов наиболее удобным для реализации на ЭВМ является метод Толле благодаря простоте его реализации и малой машинной сложности. Метод Терских проще реализуется на ЭВМ, но он имеет несколько большую машинную сложность и для определения амплитуд колебаний системы на собственных частотах требуются дополнительные вычисления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чистяков В.К. Динамика поршневых и комбинированных двигателей внутреннего сгорания: учебное пособие для машиностроительных ВУЗов по специальности «Двигатели внутреннего сгорания». – М.: Машиностроение, 1989 – 256 с. ил.
2. Цзе Ф.С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т. Механические колебания. Пер. с англ. Я.А. Лосева и О.В. Эглита под ред. Чл.-корр АН СССР И.Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1966.
3. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории крутильных колебаний, – М.: Государственное научно-технич. издательство машиностроительной литературы, 1957.
4. Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов. Справочник. - М.: Машиностроение, 1980.