

УДК 629.114.2

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РЕЗИНОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РМШ ГУСЕНИЧНОГО ДВИЖИТЕЛЯ

С.А. Коростелев, Д.Ю. Каширский, К.С. Нечаев

В работе представлен алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния резиновых элементов гусеничного движителя вызванного запрессовкой резинометаллического пальца в отверстия проушин и последующим нагружением радиальной силой и крутящим моментом. В основу алгоритма положен Δ -метод. Численная реализация алгоритма осуществлена применением метода конечных элементов.

В современном машиностроении для снижения динамических нагрузок применяют силовые резиновые элементы, которые могут иметь различную форму и конструктивные параметры, иметь различные виды нагружения.

В ходовой части гусеничных машин, а именно для сочленения траков гусеничной цепи наибольшее распространение получили резинометаллические шарниры комбинированного типа с ограничителем радиальной деформации рисунок 1. В процессе эксплуатации резиновые элементы шарнира испытывают:

- большие деформации, вызванные запрессовкой пальца шарнира в проушину звена;
- нагружение, вызванное растягивающим усилием в цепи;
- деформации, вызванные вращением звеньев относительно друг друга.

При проектировании резинометаллического шарнирного соединения необходимо обеспечить:

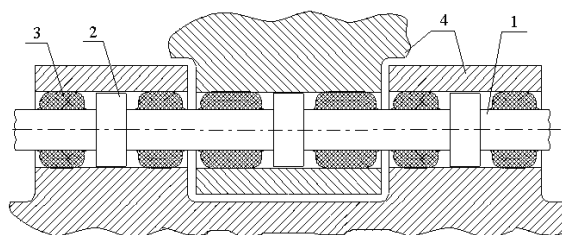
- размещение резиновых элементов в проушинах заданной конструкции звена;
- возможность сборки резиновых элементов, резиновый элемент должен быть расположен на достаточном расстоянии от ограничителя;
- не только отсутствие напыла резины на арматуру пальца, но и исключить возможность заключения абразива между металлом и резиновым элементом;
- при запрессовке возникающие в резиновом элементе касательные напряжения τ_{rz} не должны превышать 1,5 МПа;

- отсутствие проскальзывания резины относительно поверхности проушины при кручении;

- необходимую радиальную жесткость резиновых элементов (радиальная жесткость должна обеспечить как минимум не касание ограничителей на всех ветвях кроме рабочей)

- равную угловую жесткость резиновых элементов двойных и тройных проушин;

В настоящей работе предложен алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния резиновых элементов шарнира при запрессовке в проушину звена и при вторичном нагружении крутящим моментом и радиальной силой, который позволяет на стадии проектирования РМШ оценить обоснованность выбора конструктивных параметров шарнирного соединения.



1 – металлическая арматура; 2 – ограничитель радиальной деформации; 3 – резиновый элемент; 4 – проушины сочлененных звеньев

Рисунок 1 - Сочленение траков гусеничной цепи

При рассмотрении деформаций резины, связанных со сборкой резинометаллического шарнирного соединения, функции перемещений u , w , v и функция гидростатического давления s являются функциями координат r , z , θ , а именно для сборки $u = u(r, z)$, $v = 0$, $w = w(r, z)$, $s = s(r, z)$.

Приращение потенциальной энергии для δ -метода на первом шаге деформирования при запрессовке запишется в виде [1,2]

$$\Delta W = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{rz} \gamma_{rz}) dV \quad (1)$$

Учитывая, что компоненты тензора напряжений определяются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma_r &= G(2\varepsilon_r + s); \quad \sigma_\theta = G(2\varepsilon_\theta + s); \\ \sigma_z &= G(2\varepsilon_z + s); \quad \tau_{rz} = G\gamma_{rz}, \end{aligned} \quad (2)$$

приращение потенциальной энергии запишется в виде

$$\Delta W = \frac{1}{2} G \iiint_V \left[\varepsilon_r^2 + 2\varepsilon_\theta^2 + 2\varepsilon_z^2 + \gamma_{rz}^2 + s(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) \right] dV \quad (3)$$

Поскольку деформации выражаются через перемещения

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r},$$

то выражение приращения потенциальной энергии приобретает вид

$$\Delta W = \frac{1}{2} G \iiint_V \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{u}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + s \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dV. \quad (4)$$

Введем обозначения для частных производных перемещений

$$u_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad w_r = \frac{\partial w}{\partial r}; \quad u_z = \frac{\partial u}{\partial z}; \quad w_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

тогда приращение потенциальной энергии деформаций запишется в виде

$$\Delta W = \frac{1}{2} G \iiint_V \left[2u_r^2 + 2 \left(\frac{u}{r} \right)^2 + 2w_z^2 + \left(u_z + w_r \right)^2 + s \left(u_r + \frac{u}{r} + w_z \right) \right] dV. \quad (5)$$

Полученное выражение справедливо для первого шага.

При определении приращения энергии деформаций на втором шаге деформирования необходимо учесть работу напряжений, которые возникли в теле на первом шаге. Учитывая это приращение энергии деформаций примет вид

$$\Delta W_2 = \Delta W + \iiint_V \left[\sigma_r^0 \varepsilon_r + \sigma_\theta^0 \varepsilon_\theta + \sigma_z^0 \varepsilon_z + \tau_{rz}^0 \gamma_{rz} \right] dV, \quad (6)$$

где $\sigma_r^0, \sigma_\theta^0, \sigma_z^0, \tau_{rz}^0$ - напряжения действующие в элементарном объеме в начале шага.

С учетом соотношений (2) получим

$$\Delta W_2 = \Delta W + G \iiint_V \left[\varepsilon_r^0 \varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta^0 \varepsilon_\theta + 2\varepsilon_z^0 \varepsilon_z + \gamma_{rz}^0 \gamma_{rz} + s^0 (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) \right] dV \quad (7)$$

Учитывая приведенные выше соотношения для i -го шага приращение потенциальной энергии запишется в виде

$$\Delta W_i = \Delta W + \iiint_V G \left[\left(2 \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_r^j \right) \varepsilon_r + \left(2 \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_\theta^j \right) \varepsilon_\theta + \left(2 \sum_{j=1}^{i-1} \varepsilon_z^j \right) \varepsilon_z + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \gamma_{rz}^j \right) \gamma_{rz} + \left(\sum_{j=1}^{i-1} s^j \right) (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z) \right] dV$$

или с учетом выражения (5) получаем

$$\Delta W = G \iiint_V \left[u_r^2 + \left(\frac{u}{r} \right)^2 + w_z^2 + \frac{1}{2} \left(u_z + w_r \right)^2 + \left(\frac{s}{2} + s^0 \right) \left(u_r + \frac{u}{r} + w_z \right) \right] dV \quad (8)$$

Для численной реализации алгоритма применен метод конечных элементов. Описание геометрической формы рассматриваемой конструкции и аппроксимация перемещений осуществлена четырехугольными изопараметрическими элементами изображенными на рисунке 2.

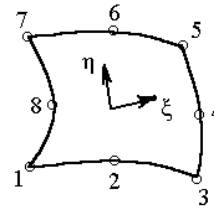


Рисунок 2 - Изопараметрический конечный элемент

Функции формы для элемента записываются в терминах безразмерных координат ξ, η в виде [3,4]

$$\left[N(\xi, \eta) \right] = \left[N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad \dots \quad N_8(\xi, \eta) \right], \quad (9)$$

Координаты и перемещения точки элемента соответственно определяются выражениями

$$r = \left[N(\xi, \eta) \right] \left[\bar{r} \right]; \quad z = \left[N(\xi, \eta) \right] \left[\bar{z} \right]; \quad u = \left[N(\xi, \eta) \right] \left[\bar{u} \right]; \quad w = \left[N(\xi, \eta) \right] \left[\bar{w} \right], \quad (10)$$

где

$$\left[\bar{r} \right] = \left[r_1 \quad r_2 \quad \dots \quad r_8 \right]^T,$$

$\left[\bar{z} \right] = \left[z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_8 \right]^T$ - векторы соответствующих координат узловых точек;

$$\left[\bar{u} \right] = \left[u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_8 \right]^T,$$

$\left[\bar{w} \right] = \left[w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_8 \right]^T$ - векторы соответствующих перемещений узловых точек.

Чтобы построить матрицу жесткости элемента отвечающую механическому поведению резинового элемента необходимо вычислить производные функций перемещения по r и z . Перемещения заданы в виде функций от координат ξ, η . Определение производных перемещений по r и z можно осуществить, применяя правило дифференцирования сложных функций

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad i=1,2,\dots,8 \quad (11)$$

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РЕЗИНОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
РМШ ГУСЕНИЧНОГО ДВИЖИТЕЛЯ

где $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{2 \times 8}$.

Производные функции формы по ξ и η определены в работе [4].

В дискретном виде функционал (8) принимает вид

$$\Delta W = \iiint_V \left(\mathbf{K}_1 \mathbf{u} \mathbf{u}^T + \mathbf{K}_2 \mathbf{v} \mathbf{v}^T + \mathbf{K}_3 \mathbf{w} \mathbf{w}^T + \mathbf{K}_4 \mathbf{u} \mathbf{v}^T + \mathbf{K}_5 \mathbf{v} \mathbf{u}^T + \mathbf{K}_6 \mathbf{u} \mathbf{w}^T + \mathbf{K}_7 \mathbf{w} \mathbf{u}^T + \mathbf{K}_8 \mathbf{v} \mathbf{w}^T + \mathbf{K}_9 \mathbf{w} \mathbf{v}^T \right) dV, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= G \left(\mathbf{N}_r^T \mathbf{N}_r + \frac{1}{r^2} \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta + \frac{1}{2} \mathbf{N}_z^T \mathbf{N}_z \right); \\ \mathbf{K}_2 &= G \left(\mathbf{N}_z^T \mathbf{N}_z + \frac{1}{2} \mathbf{N}_r^T \mathbf{N}_r \right); \\ \mathbf{K}_3 &= G \left(\mathbf{N}_z^T \mathbf{N}_z \right); \\ \mathbf{K}_4 &= 2G \left(\mathbf{N}_r^T \mathbf{N}_r + \frac{1}{r^2} \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta + \frac{1}{2} \mathbf{N}_z^T \mathbf{N}_z \right); \\ \mathbf{K}_5 &= G \left(\mathbf{N}_z^T \mathbf{N}_r \right); \\ \mathbf{K}_6 &= 2G \left(\mathbf{N}_z^T \mathbf{N}_z + \frac{1}{2} \mathbf{N}_r^T \mathbf{N}_r \right); \\ \mathbf{K}_7 &= G \left(\mathbf{N}_z^T \mathbf{N}_r \right); \\ \mathbf{K}_8 &= \frac{G}{2} \left(\mathbf{N}_r^T \mathbf{N}_r + \frac{1}{2r} \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta \right); \\ \mathbf{K}_9 &= \frac{G}{2} \left(\mathbf{N}_z^T \mathbf{N}_z \right); \end{aligned}$$

нижний индекс у функции формы означает частную производную.

Для минимизации функционала дифференцируем выражение (12) и получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta W)}{\partial \mathbf{u}} &= \iiint_V \left(2 \mathbf{K}_1 \mathbf{u} + \mathbf{K}_4 \mathbf{v} + \mathbf{K}_6 \mathbf{w} + \mathbf{K}_8 \mathbf{u} \right) dV = 0; \\ \frac{\partial(\Delta W)}{\partial \mathbf{v}} &= \iiint_V \left(\mathbf{K}_2 \mathbf{v} + 2 \mathbf{K}_5 \mathbf{u} + \mathbf{K}_7 \mathbf{w} + \mathbf{K}_9 \mathbf{v} \right) dV = 0; \\ \frac{\partial(\Delta W)}{\partial \mathbf{w}} &= \iiint_V \left(\mathbf{K}_3 \mathbf{w} + \mathbf{K}_7 \mathbf{u} + \mathbf{K}_9 \mathbf{v} \right) dV = 0. \quad (13) \end{aligned}$$

Учитывая выражения (13) матрица жесткости элемента, описывающего упругое поведение резины, запишется в виде

$$\mathbf{K}_p = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 2 \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_8 \\ \mathbf{K}_3^T & 2 \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_9 \\ \mathbf{K}_8 & \mathbf{K}_9 & 0 \end{bmatrix} r \det \mathbf{F} d\xi d\eta \quad (14)$$

Произведение $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$, где

$$\mathbf{F} = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \mathbf{K}_4 & \mathbf{K}_5 & \mathbf{K}_8 \\ \mathbf{K}_7 & \mathbf{K}_6 & \mathbf{K}_9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} r \det \mathbf{F} d\xi d\eta,$$

позволяет учесть влияние деформации элемента определенной на предыдущем шаге деформирования.

Приведенные соотношения позволяют определить напряженно-деформированное состояние резиновых элементов после сборки, располагая которым можно приступить к рассмотрению алгоритма расчета при вторичном нагружении вызванным относительным поворотом звеньев.

При рассмотрении деформаций резины, связанных с вторичным нагружением крутящим моментом резинометаллического шарнирного соединения, функции перемещений u , w , v являются функциями координат r , z , θ , т.е. $u = 0$, $v = v(r, z)$, $w = 0$.

Приращение потенциальной энергии для δ - метода при вторичном нагружении крутящим моментом запишется в виде

$$\Delta W = \frac{1}{2} \iiint_V (\tau_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \tau_{z\theta} \gamma_{z\theta}) dV. \quad (15)$$

Учитывая, что компоненты тензора напряжений определяются выражениями

$$\tau_{r\theta} = G \gamma_{r\theta}; \quad \tau_{z\theta} = G \gamma_{z\theta},$$

приращение потенциальной энергии запишется в виде

$$\Delta W = \frac{1}{2} G \iiint_V \left[\gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{z\theta}^2 \right] dV, \quad (16)$$

где $\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$; $\gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z}$,

С учетом обозначений для частных производных перемещений

$$v_r = \frac{\partial v}{\partial r}; \quad v_z = \frac{\partial v}{\partial z},$$

приращение потенциальной энергии деформаций запишется в виде

$$\Delta W = \frac{1}{2} G \iiint_V \left[v_r^2 - 2v \frac{v}{r} + \frac{v^2}{r^2} + v_z^2 \right] dV. \quad (17)$$

В матричном виде выражение (17) перепишется в следующем виде

$$\Delta W = \iiint_V \mathbf{K} \mathbf{v} \mathbf{v}^T dV, \quad (18)$$

где

$$\mathbf{K} = \frac{G}{2} \left(\mathbf{N}_r^T \mathbf{N}_r - \frac{2}{r} \mathbf{N}_r^T \mathbf{N}_\theta + \frac{1}{r^2} \mathbf{N}_\theta^T \mathbf{N}_\theta + \mathbf{N}_z^T \mathbf{N}_z \right).$$

Для минимизации функционала дифференцируем выражение (18) и получаем

$$\frac{\partial(\Delta W)}{\partial \mathbf{A}_1} = \iiint_V \mathbf{e}[\mathbf{A}_1] dV = 0. \quad (19)$$

Таким образом, матрица жесткости резинового элемента при вторичном нагружении крутящим моментом запишется в виде

$$\mathbf{K}_p = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{A}_1^T \mathbf{r} |\det \mathbf{J}| d\xi d\eta. \quad (20)$$

Изложенные выше соотношения положены в основу программного комплекса [5], который позволяет определить поле тензоров напряжений, деформаций и их инвариантов в теле резинового элемента резинометаллического пальца гусеницы при сборке и при вторичном нагружении крутящим моментом.

Следующим этапом является расчет напряженно-деформированного состояния резинометаллического пальца при действии растягивающего усилия в гусеничной цепи.

При рассмотрении деформирования резинового элемента, связанного с вторичным нагружением радиальной силой резинометаллического шарнирного соединения, функции перемещений u , w , v и функция гидростатического давления s являются функциями координат r , z , θ , т.е. $u = u(r, z, \theta)$, $v = v(r, z, \theta)$, $w = w(r, z, \theta)$, $s = s(r, z, \theta)$.

Приращение потенциальной энергии для δ - метода при вторичном нагружении радиальной силой запишется в виде

$$\Delta W = \Delta W_0 + \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{rz} \gamma_{rz} + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta} + \tau_{z\theta} \gamma_{z\theta}) dV, \quad (21)$$

где ΔW_0 - приращение потенциальной энергии, вызванное сборкой резинометаллического шарнира, определяется по зависимости

$$\Delta W_0 = G \iiint_V [2\varepsilon_r^0 \varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta^0 \varepsilon_\theta + 2\varepsilon_z^0 \varepsilon_z + \gamma_{r\theta}^0 \gamma_{r\theta} + \gamma_{rz}^0 \gamma_{rz} + \gamma_{\theta z}^0 \gamma_{\theta z} + s^0 (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z)] dV. \quad (22)$$

Учитывая, что компоненты тензора напряжений определяются выражениями

$$\sigma_r = G(2\varepsilon_r + s); \quad \sigma_\theta = G(2\varepsilon_\theta + s); \quad \sigma_z = G(2\varepsilon_z + s);$$

$$\tau_{rz} = G\gamma_{rz}; \quad \tau_{r\theta} = G\gamma_{r\theta}; \quad \tau_{z\theta} = G\gamma_{z\theta},$$

приращение потенциальной энергии запишется в виде

$$\Delta W = \Delta W_0 + \frac{1}{2} G \iiint_V [2\varepsilon_r^2 + 2\varepsilon_\theta^2 + 2\varepsilon_z^2 + \gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{rz}^2 + \gamma_{\theta z}^2 + s(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z)] dV. \quad (23)$$

Поскольку деформации выражаются через перемещения

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}; & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \\ \gamma_{z\theta} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

тогда переписав с учетом обозначений для частных производных перемещений

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; & v_r &= \frac{\partial v}{\partial r}; & w_r &= \frac{\partial w}{\partial r}; & u_z &= \frac{\partial u}{\partial z}; & v_z &= \frac{\partial v}{\partial z}; \\ w_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & u_\theta &= \frac{\partial u}{\partial \theta}; & v_\theta &= \frac{\partial v}{\partial \theta}; & w_\theta &= \frac{\partial w}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

получаем выражение для приращения потенциальной энергии в виде

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta W_0 + \frac{1}{2} G \iiint_V \left[2u_r^2 + 2\frac{1}{r^2} (u_\theta + u_r \frac{v}{r})^2 + 2w_z^2 + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{r} u_\theta + v_r - \frac{v}{r} \right)^2 + (u_z + w_r)^2 + \left(v_z + \frac{1}{r} w_\theta \right)^2 + \right. \\ &+ s \left(u_r + \frac{1}{r} v_\theta + \frac{u}{r} + w_z \right) + 4u_r u_r^0 + 4\frac{1}{r^2} v_\theta v_\theta^0 + 4\frac{u}{r^2} v_\theta^0 + \\ &+ 4\frac{u^0}{r^2} v_\theta + 4\frac{uu^0}{r^2} + 4w_z w_z^0 + 2u_z u_z^0 + 2w_r u_z^0 + \\ &+ 2u_z w_r^0 + 2w_r w_r^0 + 2\frac{1}{r^2} u_\theta u_\theta^0 + 2\frac{1}{r} v_r u_\theta^0 - \\ &- 2\frac{1}{r^2} v u_\theta^0 + 2\frac{1}{r} u_\theta v_r^0 + 2v_r v_r^0 - 2\frac{1}{r} v v_r^0 + \\ &+ 2\frac{1}{r^2} v v^0 + 2v_z v_z^0 + 2\frac{1}{r} w_\theta v_z^0 + 2\frac{1}{r} v_z w_\theta^0 + \\ &+ \left. 2\frac{1}{r^2} w_\theta w_\theta^0 + s^0 \left(u_r + \frac{1}{r} v_\theta + \frac{u}{r} + w_z \right) \right] dV. \quad (24) \end{aligned}$$

Описание геометрической формы рассматриваемой конструкции и аппроксимация перемещений осуществлена трехмерными призматическими изопараметрическими элементами состоящими из 20 узлов изображенными на рисунке 3 [3].

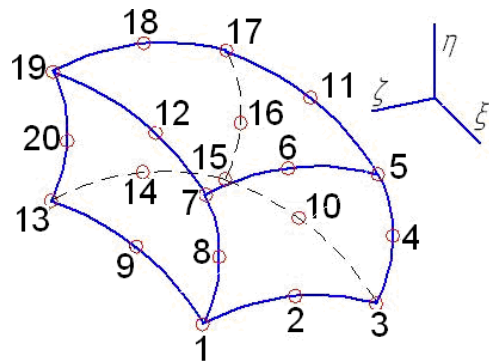


Рисунок 3 – Изопараметрический конечный элемент

Функции формы для элемента записываются в терминах безразмерных координат ξ, η, ζ в виде [3,6]

$$[N(\xi, \eta, \zeta)] = [N_1(\xi, \eta, \zeta) \ N_2(\xi, \eta, \zeta) \ \dots \ N_{20}(\xi, \eta, \zeta)] \quad (25)$$

Координаты и перемещения точки элемента соответственно определяются выражениями

$$\begin{aligned} r &= [N(\xi, \eta, \zeta)] \underline{r}; \quad z = [N(\xi, \eta, \zeta)] \underline{z}; \\ \theta &= [N(\xi, \eta, \zeta)] \underline{\theta}; \quad u = [N(\xi, \eta, \zeta)] \underline{u}; \\ w &= [N(\xi, \eta, \zeta)] \underline{w}; \quad v = [N(\xi, \eta, \zeta)] \underline{v}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$\underline{r} = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_{20}]^T$, $\underline{z} = [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_{20}]^T$,
 $\underline{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_{20}]^T$ - векторы соответствующих координат узловых точек;

$\underline{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{20}]^T$, $\underline{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_{20}]^T$,
 $\underline{v} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{20}]^T$ - векторы соответствующих перемещений узловых точек.

Чтобы построить матрицу жесткости элемента отвечающую механическому поведению резинового элемента необходимо вычислить производные функций перемещения по r, z и θ . Перемещения заданы в виде функций от координат ξ, η, ζ . Применяя правило дифференцирования сложных функций выражение для определения производных перемещений по r, z и θ запишется в виде.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \end{Bmatrix} = [F] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}, \quad i=1,2,\dots,20 \quad (27)$$

где $[F] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial r} \\ \frac{\partial N}{\partial z} \\ \frac{\partial N}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{3 \times 20} = [F_1 \ F_2 \ F_3]_{3 \times 3}$

Производные функции формы по ξ, η, ζ определены в [6].

Учитывая соотношения (24-27) выражение для функционала (24) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta W &= \iiint_V [G] [A_1] [F] [F]^T [A_2] [F] \\ &+ [F] [A_3] [F] [F]^T [A_4] [F] [F]^T [A_5] [F] \\ &+ [F] [A_6] [F] [F]^T [A_7] [F] [F]^T [A_8] [F] \\ &+ [F] [A_9] [F] [F]^T [A_{10}] [F] [F]^T [A_{11}] [F] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ [F] [A_{12}] [F] [F]^T [A_{13}] [F] [F]^T [A_{14}] [F] \\ &+ [F] [A_{15}] [F] [F]^T [A_{16}] [F] [F]^T [A_{17}] [F] \\ &+ [F] [A_{18}] [F] [F]^T [A_{19}] [F] \\ &+ [F] [A_{20}] [F] [F]^T [A_{21}] [F] \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= 2G([N_r]^T [N_r] + \frac{1}{r^2} [N]^T [N] + \\ &+ \frac{1}{2r^2} [N_\theta]^T [N_\theta] + \frac{1}{2} [N_z]^T [N_z]); \\ A_2 &= 2G([N_z]^T [N_z] + \frac{1}{2} [N_r]^T [N_r] + \frac{1}{2r^2} [N_\theta]^T [N_\theta]); \\ A_3 &= G([N_z]^T [N_r]); \\ A_4 &= 2G(\frac{1}{r^2} [N_\theta]^T [N_\theta] + \frac{1}{2} [N_r]^T [N_r] - \\ &- \frac{1}{r} [N_r]^T [N] + \frac{1}{2r^2} [N]^T [N] + \frac{1}{2} [N_z]^T [N_z]); \\ A_5 &= G(\frac{2}{r^2} [N_\theta]^T [N] + \frac{1}{r} [N_r]^T [N_\theta] - \frac{1}{r^2} [N]^T [N_\theta]); \\ A_6 &= G(\frac{1}{r} [N_z]^T [N_\theta]); \\ A_7 &= \frac{G}{2}([N]^T [N_r] + \frac{1}{r} [N]^T [N]); \\ A_8 &= \frac{G}{2}([N]^T [N_z]); \quad A_9 = \frac{G}{2}([N]^T [N_\theta]); \\ A_{10} &= 2G([N_r]^T [N_r] + \frac{1}{r^2} [N]^T [N] + \\ &+ \frac{1}{2} [N_z]^T [N_z] + \frac{1}{2r^2} [N_\theta]^T [N_\theta]); \\ A_{11} &= 2G([N_z]^T [N_z] + \frac{1}{2} [N_r]^T [N_r] + \frac{1}{2r^2} [N_\theta]^T [N_\theta]); \\ A_{12} &= 2G(\frac{1}{r^2} [N_\theta]^T [N_\theta] + \frac{1}{2} [N_r]^T [N_r] - \\ &- \frac{1}{2r} [N]^T [N_r] + \frac{1}{2r^2} [N]^T [N] + \frac{1}{2} [N_z]^T [N_z]); \\ A_{13} &= G(\frac{1}{2r^2} [N]^T [N_\theta] + \frac{1}{r} [N_\theta]^T [N_r]); \\ A_{14} &= G(\frac{1}{2r^2} [N_\theta]^T [N] + \frac{1}{r} [N_r]^T [N_\theta] - \frac{1}{r^2} [N]^T [N_\theta]); \\ A_{15} &= G([N_r]^T [N_z]); \quad A_{16} = G([N_z]^T [N_r]); \\ A_{17} &= \frac{G}{r}([N_\theta]^T [N_z]); \quad A_{18} = \frac{G}{r}([N_z]^T [N_\theta]); \\ A_{19} &= G([N_r]^T [N] + \frac{1}{r} [N]^T [N]); \\ A_{20} &= \frac{G}{r}([N_\theta]^T [N]); \quad A_{21} = G([N_z]^T [N]) \end{aligned} \quad (29)$$

Для минимизации функционала дифференцируем выражение (34) и получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\Delta W)}{\partial \mathbf{u}_1^0} &= \iiint_v \left(\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1^0 + \mathbf{A}_3 \mathbf{u}_2^0 + \mathbf{A}_5 \mathbf{u}_3^0 + \mathbf{A}_7 \mathbf{u}_4^0 \right) \\ &+ \mathbf{A}_{10} \mathbf{u}_5^0 + \mathbf{A}_{16} \mathbf{u}_6^0 + \mathbf{A}_{13} \mathbf{u}_7^0 + \mathbf{A}_{19} \mathbf{u}_8^0 \Big] V = 0; \\ \frac{\partial(\Delta W)}{\partial \mathbf{u}_2^0} &= \iiint_v \left(\mathbf{A}_3 \mathbf{u}_1^0 + 2 \mathbf{A}_2 \mathbf{u}_2^0 + \mathbf{A}_6 \mathbf{u}_3^0 + \mathbf{A}_8 \mathbf{u}_4^0 \right) \\ &+ \mathbf{A}_{15} \mathbf{u}_5^0 + \mathbf{A}_{11} \mathbf{u}_6^0 + \mathbf{A}_{17} \mathbf{u}_7^0 + \mathbf{A}_{21} \mathbf{u}_8^0 \Big] V = 0; \\ \frac{\partial(\Delta W)}{\partial \mathbf{u}_3^0} &= \iiint_v \left(\mathbf{A}_5 \mathbf{u}_1^0 + \mathbf{A}_6 \mathbf{u}_2^0 + 2 \mathbf{A}_4 \mathbf{u}_3^0 + \mathbf{A}_9 \mathbf{u}_4^0 \right) \\ &+ \mathbf{A}_{14} \mathbf{u}_5^0 + \mathbf{A}_{18} \mathbf{u}_6^0 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{u}_7^0 + \mathbf{A}_{20} \mathbf{u}_8^0 \Big] V = 0; \\ \frac{\partial(\Delta W)}{\partial \mathbf{u}_4^0} &= \iiint_v \left(\mathbf{A}_7 \mathbf{u}_1^0 + \mathbf{A}_8 \mathbf{u}_2^0 + \mathbf{A}_9 \mathbf{u}_3^0 \right) dv = 0 \quad (30) \end{aligned}$$

Учитывая выражение (30) матрица жесткости элемента, описывающего упругое поведение резины, запишется в виде

$$\mathbf{K}_p = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 2\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_5 & \mathbf{A}_7 \\ \mathbf{A}_3 & 2\mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_6 & \mathbf{A}_8 \\ \mathbf{A}_5 & \mathbf{A}_6 & 2\mathbf{A}_4 & \mathbf{A}_9 \\ \mathbf{A}_7 & \mathbf{A}_8 & \mathbf{A}_9 & 0 \end{bmatrix} r \left| \det \mathbf{J} \right| d\xi d\eta \quad (31)$$

Произведение $\mathbf{H} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^0 \\ \mathbf{u}_2^0 \\ \mathbf{u}_3^0 \\ \mathbf{u}_4^0 \end{Bmatrix}$, где

$$\mathbf{H} = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{10} & \mathbf{A}_{16} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{19} \\ \mathbf{A}_{15} & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{17} & \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{A}_{14} & \mathbf{A}_{18} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{20} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} r \left| \det \mathbf{J} \right| d\xi d\eta \quad (32)$$

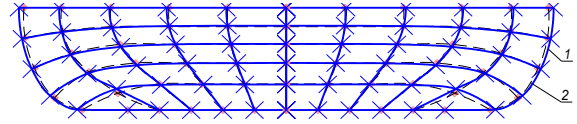
позволяет учесть влияние деформации элемента определенной после сборки резинометаллического шарнира.

Приведенные соотношения позволяют определить напряженно-деформированное состояние резиновых элементов после вторичного нагружения радиальной силой. По предложенному алгоритму создана программа для ЭВМ [7].

Для проверки адекватности предложенного алгоритма были выполнены расчеты напряженно-деформированного состояния и определены механические характеристики для образцов с прямоугольным сечением резиновых элементов и результаты расчета сопоставлены с данными экспериментального исследования опытных образцов [8]. Так на рисунке 4 приведены картины распределения перемещений по сечению деформированного образца.

Анализ картины деформированного состояния (рисунок 4) построенной по экспери-

ментальным данным и по данным расчета показал, что максимальные отклонения перемещения узлов в сетке не превышает 2,6% для степени обжатия 20...40%.

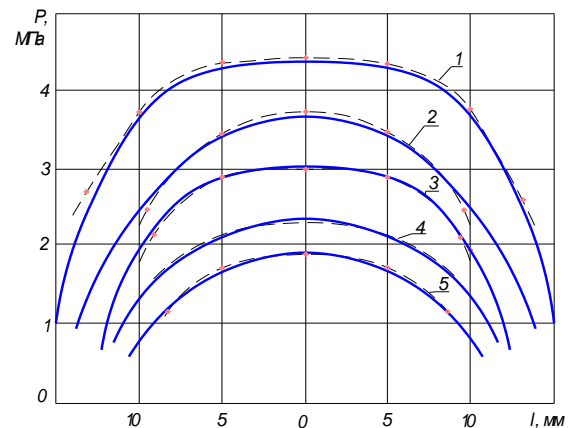


1 – данные расчета;

2 – данные эксперимента

Рисунок 4 – Распределение перемещений по сечению деформированного образца при степени обжатия $\lambda = 32,5\%$

На рисунке 5 представлены эпюры удельных давлений на поверхности контакта резинового элемента и проушины при различных степенях запрессовки, полученные экспериментальным и расчетными путями.



1 – при степени обжатия $\lambda = 42,5\%$;

2 – при $\lambda = 37,5\%$; 3 – при $\lambda = 32,5\%$;

4 – при $\lambda = 27,5\%$; 5 – при $\lambda = 22,5\%$;

— расчет; — — эксперимент

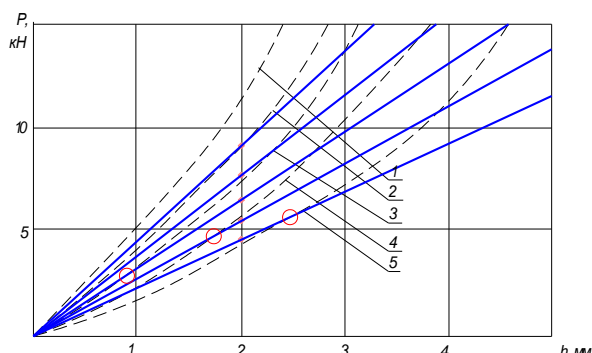
Рисунок 5 - Сопоставление эпюр распределения усредненных удельных давлений по длине резинового элемента

На рисунке 6 представлены характеристики радиальной жесткости, построенные по данным эксперимента и по данным расчета. В реальных конструкциях ограничение величины радиального зазора между поверхностью проушины и поверхностью ограничителя, и в существующих конструкциях не превышает 0,6...0,7 мм.

На рисунке 7 представлены характеристики угловой жесткости резиновых элементов, построенные по результатам расчета и по данным эксперимента. Величина закручи-

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РЕЗИНОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РМШ ГУСЕНИЧНОГО ДВИЖИТЕЛЯ

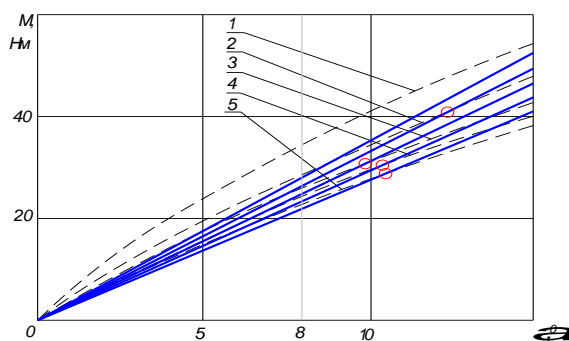
вания резиновых элементов в существующих конструкциях шарниров не превышает $5^0 \dots 7^0$.



- 1 — при степени обжатия $\lambda = 42,5\%$;
 2 — при $\lambda = 37,5\%$; 3 — при $\lambda = 32,5\%$;
 4 — при $\lambda = 27,5\%$; 5 — при $\lambda = 22,5\%$;

— расчет; — эксперимент

Рисунок 6 - Сопоставление результатов расчета и экспериментальных данных по радиальной жесткости



- 1 — при степени обжатия $\lambda = 42,5\%$;
 2 — при $\lambda = 37,5\%$; 3 — при $\lambda = 32,5\%$;
 4 — при $\lambda = 27,5\%$; 5 — при $\lambda = 22,5\%$;

— расчет; — эксперимент

Рисунок 7 - Сопоставление результатов расчета и экспериментальных данных по угловой жесткости

Предложенный в настоящей работе алгоритм позволяет выполнять расчет напряженно-деформированного состояния для резиновых элементов любой геометрической формы и благодаря пошаговому нагружению учитывать изменение граничных условий в процессе нагружения, т.е. учитывать наплыв резины на арматуру пальца или соприкосновение с поверхностью ограничителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дымников С.И., Лавендел Э.Э. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов/ Дымников С.И., Лавендел Э.Э. – Рига: Зинатне, 1980. – 238с.

2. Лавендел Э.Э. Расчет резинотехнических изделий/ Лавендел Э.Э. - М.: Машиностроение, 1976. – 232 с.

3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов/ Сегерлинд Л. - М.: Мир, 1979. – 392 с.

4. Коростелев С.А. Определение угловой жесткости РМШ гусеничного движителя комбинированного типа/ С.А. Коростелев, Д.Ю. Каширский // «Вестник КГТУ. Вып. 39. Серия транспорт», Красноярский государственный технический университет. - Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2005. - С. 217-222.

5. Коростелев С.А. Определение напряженно-деформированного состояния резиновых элементов резинометаллического шарнирного соединения гусеничного движителя после сборки (RMSbSb)/ С.А. Коростелев// Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2006611128. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 6 мая 2006 г.

6. Определение механических характеристик резиновых элементов резинометаллических шарниров гусеничного движителя/ Д.Ю. Каширский, С.А. Коростелев. Деп. в ВИНТИ 16.05.2006, № 663-B2006. – Барнаул, 2006. – 28 с.

7. Коростелев С.А. Определение механических характеристик резиновых элементов резинометаллического шарнира гусеничного движителя при статическом нагружении (RMSb)/ С.А. Коростелев// Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2006612761. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 6 мая 2006 г.

8. Целищев В.А. Исследование оптимальных параметров цилиндрических резино-металлических шарниров гусениц сельскохозяйственных тракторов/ Целищев В.А.: дис. - Барнаул, 1974. – 208 с.