

## МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.Ф. Вербилов, В.В. Ковалев

*В данной работе проводится сравнение различных оптимизационных методов с целью выбора и адаптации одного из них для решения задач оптимального проектирования параметров сложных механических систем. Предлагается использование комплексного метода Бокса с вычислением функции цели методом временных конечных элементов.*

*The work presents the comparison of various optimization methods, that was carried out with the purpose of a choice and adaptation of one of them for the solution of problems of optimum designing parameters of complex mechanical systems. Use of a complex method of Box with aim function evaluation by a method of time final elements is offered.*

В настоящее время возрастает роль оптимизационных расчетов в проектной инженерной практике. Связано это с совершенствованием компьютерной техники, которая позволяет на современном этапе рассматривать проектные задачи большой размерности, более сложные математические модели, наиболее полно описывающие реальные объекты и процессы.

Важной задачей при проектировании сложных механических систем является расчет оптимальных параметров его элементов с целью снижения динамической нагруженности. Поэтому моделирование динамического поведения, выбор оптимизационного метода, создание работоспособного пакета прикладных программ являются актуальной проблемой.

Обширный список публикаций по вопросам оптимального проектирования механических систем за последние годы показывает на широкое разнообразие методов и алгоритмов решения. При оптимальном проектировании требуется минимизировать или максимизировать некоторую функцию, называемую целевой функцией, которая характеризует какой-то параметр конструкции при ограничениях.

В большинстве случаев функция цели является нелинейной. Это накладывает определенные ограничения на выбор методов решения. Рассматриваемая задача относится к разряду оптимизационных задач с ограничениями. Для решения такого класса задач используют либо модифицированные с учетом ограничений методы безусловной оптимизации, либо преобразуют задачу с ограничениями в задачу без ограничений (так называемая последовательная оптимизация без

ограничений или метод штрафных функций) [1, 3].

Для решения задач безусловной оптимизации разработаны весьма эффективные, надежные и теоретически обоснованные методы. Несмотря на универсальность метода штрафных функций, необходимо отметить, что его использование сопровождается колебаниями значений варьируемых параметров относительно граничных значений. Это приводит к затратам машинного времени.

Методы безусловной оптимизации, используемые на отдельных этапах работы алгоритмов нелинейной оптимизации, можно разделить на две крупные группы:

- методы, использующие только значения функций;
- методы, использующие производные.

Методы из первой группы часто называют прямыми методами, а из второй – градиентными.

К методам прямого поиска относят метод поиска по образцу (метод Хука-Дживса) и метод деформированного многогранника (метод Нелдера-Мида). Оба метода имеют модификации с учетом ограничений.

К градиентным методам относятся метод наискорейшего спуска, метод сопряженных градиентов (Флетчера-Ривса) и метод сопряженных направлений (Дэвидона-Флетчера-Пауэлла).

Градиентные методы позволяют ускорить сходимость оптимального процесса. Однако, чаще всего, в задачах оптимального проектирования параметров элементов ходовой части функция цели находится с использованием численных методов. Это значительно затрудняет получение производных

## МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

целевой функции и функций ограничений. В работе Г. Реклейтиса, А. Рейвиндрана, К. Регсдела [1] предложено использовать численные аппроксимации градиентов. Это так же увеличивает число вычислений функции цели, и в задачах большой размерности практически не нашло применения.

В последнее время появился наиболее перспективный метод решения задачи оптимального проектирования упругих конструкций разработанный Э. Хогом – метод чувствительности [2]. Его суть заключается в нахождении векторов чувствительности, которые определяют зависимость целевой функции от переменных проектирования. В результате анализа чувствительности получаем значения градиентов, которые требуются для всех градиентных методов оптимизации проекта.

Для сравнения различных методов была выбрана задача минимизации функции Розенброка ( $f(x)=100*(x_2-x_1)^2+(1-x_1)^2$ ) (рисунок 1). Результаты тестирования показывают, что метод Дэвидона-Флетчера-Пауэлла является наиболее эффективным из градиентных, а метод прямого поиска практически сопоставим с методом Флетчера-Ривса и методом наискорейшего спуска (рисунок 2).

Особенностью исследования динамики сложных механических систем является то, что они включают в себя большое количество элементов, имеющих между собой как вязкоупругие, так и кинематические связи (голономные и неголономные). Динамическое поведение таких объектов описывается многомерной системой, включающей дифференциальные и алгебраические уравнения. Решая систему уравнений, можно получить значение целевых функций на каждом шаге оптимизационного процесса.

Наиболее популярными методами решения динамических уравнений являются методы Эйлера и Рунге-Кутты [4, 5]. Метод Рунге-Кутты дает более точные результаты, чем метод Эйлера, однако требует больших вычислительных затрат. Оба метода позволяют непосредственно начать счет при известных начальных условиях и изменять значение шага в любой точке в процессе счета.

Многошаговые методы основаны на том, что для вычисления значений текущих неизвестных используются результаты не одного, а нескольких предыдущих шагов. В частности, широко применяется метод Адамса четвертого порядка [5]. Однако для реализации метода Адамса требуется первоначально определить значения неизвестных на первых

четырёх шагах численного интегрирования каким-либо другим способом (например, используя метод Рунге-Кутты), что усложняет алгоритм. Кроме того, метод Адамса не позволяет (без усложнения формул) изменять шаг интегрирования в процессе счета.

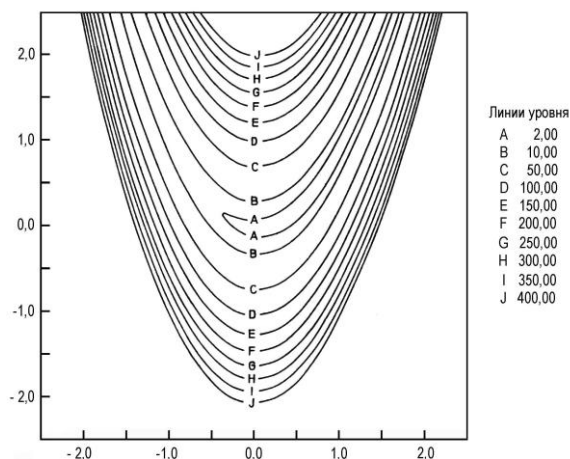


Рисунок 1 – Функция Розенброка

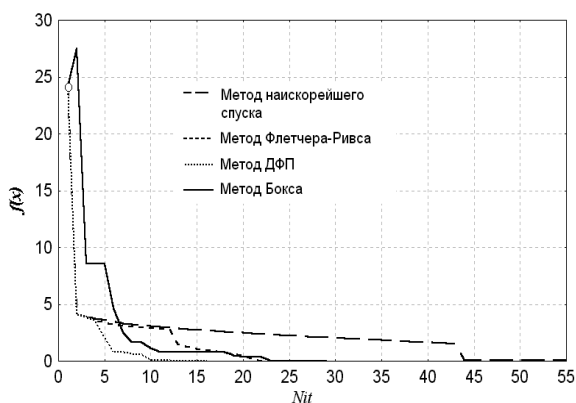


Рисунок 2 – Графики оптимизационных процессов

Использование перечисленных методов позволяет достаточно просто строить алгоритмы решения динамических задач. Однако при исследовании математических моделей сложных механических систем требуется приведение системы дифференциально-алгебраических уравнений к системе дифференциальных уравнений, что предполагает достаточно громоздкие преобразования.

В настоящей работе предлагается использовать метод временных конечных элементов [6, 7], который позволяет непосредственно учитывать кинематические связи. Применение временного конечного элемента предусматривает в качестве параметров перемещения элементов механической системы и их первые производные. Особенности

метода и его применение к анализу динамических систем без учета кинематических голономных связей показаны в [8]. В настоящей работе метод конечных элементов адаптируется для решения задач динамики, описанных системой дифференциально-алгебраических уравнений, т.е. с учетом кинематических связей.

Вариационная формулировка задачи, эквивалентная системе дифференциально-алгебраических уравнений, базируется на основании принципа Гамильтона [9]:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} \dot{\Phi}^T [K] \dot{\Phi} - \frac{1}{2} \Phi^T [C] \Phi - \Phi^T [P] \right) dt = 0. \quad (1)$$

В приведенном выражении  $[K]$ ,  $[C]$ ,  $[\Phi]$  и  $[\Phi_q]$  – соответственно матрицы жесткости, демпфирования, внешних сил и кинематических связей;  $\{q\}$  – вектор обобщенных координат;  $\{P\}$  – вектор сил;  $\{\lambda\}$  – вектор множителей Лагранжа.

Выполняя преобразования в соответствии с методом временных конечных элементов [8], получаем систему алгебраических уравнений, в результате решения которой на каждом шаге интегрирования получаем значения обобщенных перемещений и скоростей.

Для сравнения методов Рунге-Кутты и временных конечных элементов была выбрана трехмассовая система с упругими связями (рисунок 3) [9].

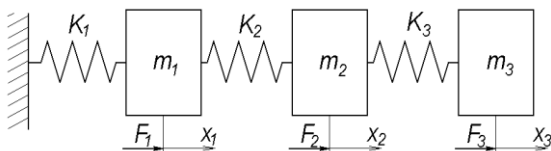


Рисунок 3 – Одномерная трехмассовая система

В таблице 1 приводятся значения параметров исследуемой одномерной трехмассовой системы. На рисунке 3 показан характер изменения внешней нагрузки.

Таблица 1 – Параметры динамической системы

	Параметр	Значение
1	$m_1$ , кг	100
2	$m_2$ , кг	100
3	$m_3$ , кг	100
4	$k_1$ , Н/м	2000
5	$k_2$ , Н/м	2000
6	$k_3$ , Н/м	2000

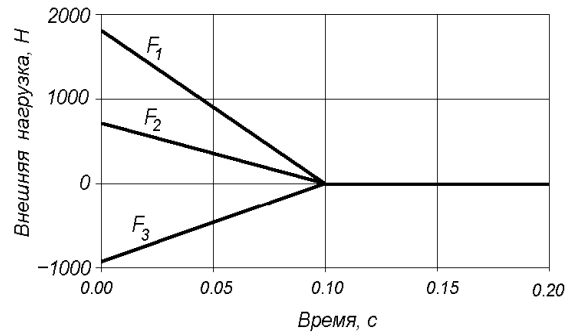


Рисунок 4 – Графики изменения внешних сил

При проведении расчета тестового примера были выбраны следующие параметры: количество шагов интегрирования  $N_{it} = 40$ , значение шага (величина временного конечного элемента)  $\tau = 0,005$  сек.

На рисунке 5 представлены графики динамического отклика третьего элемента системы, полученные в результате точного решения и методом временных конечных элементов.



Рисунок 5 – Графики динамического перемещения третьего элемента

Далее было проведено сравнение результатов расчета методом временных конечных элементов с аналитическим решением и решением методом Рунге-Кутты, которое показало хорошую сходимость и точность предлагаемого метода. Кроме того, с увеличением шага интегрирования (рисунок 6) величина погрешности для метода временных конечных элементов увеличивается незначительно (0,998 %).

Таким образом, при вычислении функции цели предпочтительно использование метода временных конечных элементов.

## МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ СЛОЖНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

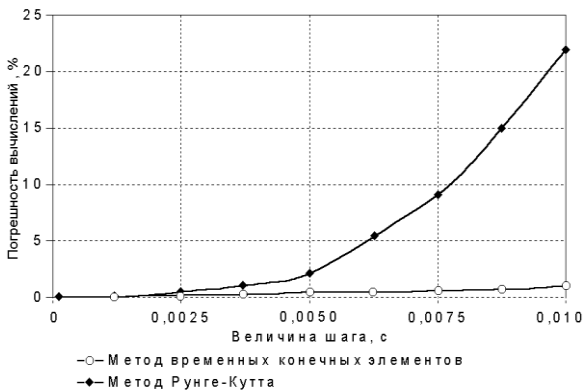


Рисунок 6 – Сравнительный анализ точности расчетных методов

Работоспособность предлагаемых методик была проверена при проведении оптимизационного расчета параметров подвески транспортного средства, представляющего четырехмассовую модель с пятью степенями свободы (рисунок 7) [5]. Модель включает четыре элемента:  $m_1$  – масса водителя и поддрессоренной части кресла,  $m_2$  – масса корпуса транспортного средства,  $m_3$  и  $m_4$  – поддрессоренные массы переднего и заднего мостов. Элементы имеют упругие и демпфирующие связи между собой, задаваемые соответственно коэффициентами упругости  $K$  и демпфирования  $C$ .

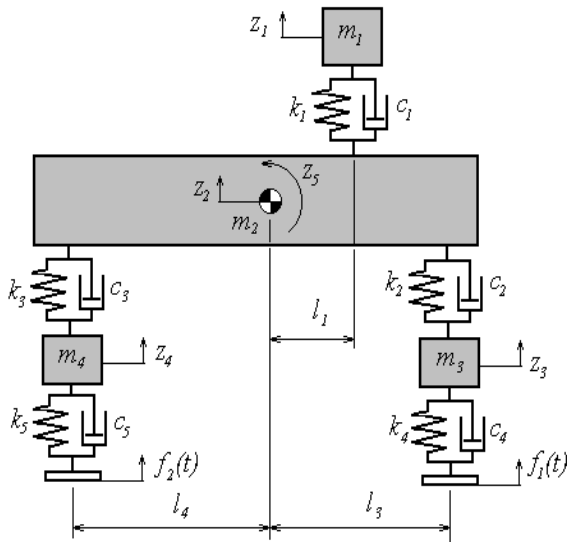


Рисунок 7 – Четырехмассовая механическая система

Внешнее кинематическое воздействие задаётся функциями  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  и характеризует вертикальные смещения передних и задних колес (рисунок 8).

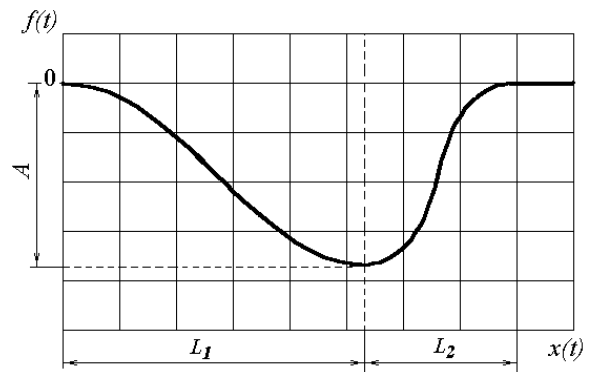


Рисунок 8 – Внешнее кинематическое воздействие

Параметры исследуемой механической системы приведены в таблицах 2, 3.

Таблица 2 – Инерционные параметры системы

	Параметр	Значение
1	Масса водителя и кресла $m_1$ , кг	131,66
2	Масса корпуса экипажа $m_2$ , кг	2043
3	Масса передней оси $m_3$ , кг	43
4	Масса задней оси $m_4$ , кг	43
5	Момент инерции корпуса $J$ , кг*м <sup>2</sup>	4632

Таблица 3 – Параметры подвески

	Жесткость $K$ , Н/м	Демпфирование $C$ , Н*с/м	Координаты крепления $l$ , м
1	17513	1750	0,254
2	52537	4378	1,016
3	52537	4378	-2,032
4	262700	876	-
5	262700	876	-

Оптимизационный расчет параметров подвески машины проводился с целью снижения амплитуды ускорений на водительском месте  $Z''_{max1}$ . Предлагаемый в настоящей работе алгоритм оптимального проектирования по методу Бокса сравнивается с методом проекции градиента, который выбран в качестве тестового примера. В результате проведенного тестирования получены следующие данные: оптимизационный расчет с использованием метода Бокса привел к уменьшению значения функции цели с 8,42 м/с<sup>2</sup> до 6,453 м/с<sup>2</sup> (метод проекции градиента – 6,538 м/с<sup>2</sup>) (рисунок 9).

В таблице 4 приводятся исходные и оптимальные значения варьируемых параметров, а также верхние и нижние ограничения.

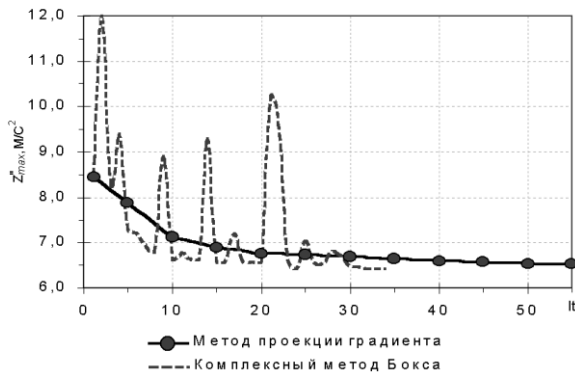


Рисунок 9 – Графики оптимизационных процессов

Таблица 4 – Значения варьируемых параметров

Параметр	Исходное значение	Нижнее ограничение	Верхнее ограничение	Оптимальное значение по методу проекции градиента	Оптимальное значение по методу Бокса
$K_1$	17513	8756	87560	8756	8756
$K_2$	52537	35025	175125	35025	35025
$K_3$	52537	35025	175125	42205	35025
$C_1$	175	350	8765	2257	8280
$C_2$	4378	876	14010	13586	13570
$C_3$	4378	876	14010	14010	14010

Анализируя результаты расчета, следует отметить, что с использованием предлагаемого оптимизационного алгоритма получено меньшее (по сравнению с тестовым методом) значение функции цели. Кроме того, при сравнительно равных затратах машинно-

го времени на расчет одного шага, для минимизации функции цели комплексным методом Бокса потребовалось 34 итерации (метод проекции градиента – 55 итераций), что подтверждает хорошую экономичность метода. Это позволяет считать работоспособными предложенные методике оптимального проектирования, использующей для вычисления функции цели метод временных конечных элементов; разработанный алгоритм позволяет решать широкий круг инженерных задач, связанных с динамикой транспортных средств.

ЛИТЕРАТУРА

1. Реклейтис, Г. Оптимизация в технике: В 2-х кн. Кн. 1. Пер. с англ. / Г. Реклейтис, А. Рейвиндран, К. Рэгсдел. – М.: Мир, 1986.
2. Хог, Э. Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции / Э. Хог, Я. Арора. – М.: Мир, 1988. – 428 с.
3. Банди, Б. Методы оптимизации / М. Банди. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.
4. Безикович, Я. С. Приближенные вычисления / Я.С. Безикович. – Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. – С. 421 - 456.
5. Хог, Э. Прикладное оптимальное проектирование/ Э. Хог, Я. Арора. - М.: Мир, 1983. – 478с.
6. Вульфсон, И. И. Нелинейные задачи динамики машин / И.И. Вульфсон, М.Э. Козловский. – Л.: Машиностроение, 1968. – С. 5 – 17.
7. Wehage, R. A. Generalized Coordinate Partitioning for Dimension Reduction in Analysis of Constrained Dynamic System/ R.A. Wehage, E.J. Haug // Journal of Mechanical Design. – 1982. – vol. 104. – P. 247 – 255.
8. Argyris, J. H. Finite Elements in Time and Space / J.H. Argyris, D.W. Scharpf // Nuclear Engineering and Design. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969. – № 10. – P. 456 – 464.
9. Akin, J. E. Application and Implementation of Finite Element Methods / J.E. Akin. – N.-Y.: Academic Press, 1982. – 373 p.