

# МЕХАНИЧЕСКИЙ КОНТАКТ ТВЕРДЫХ ТЕЛ В УСЛОВИЯХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Н.В. Котенева

*Рассматривается динамическая модель контактного взаимодействия твердых тел за пределом упругости при нормальном направлении внешней нагрузки к плоскости контактирования.*

## Введение

Проблеме контактного взаимодействия посвящено множество публикаций ученых и практических инженеров. Широко изучены вопросы, связанные с рассмотрением поведения контакта в условиях как статического, так и динамического нагружения. Однако контактирование, как правило, носит упругий характер. На практике же, в большинстве случаев, имеет место упругопластический и пластический контакт. Исследованиям же по механике контактного нагружения с учетом упругопластичности и пластичности уделялось незаслуженно малое внимание, что, по-видимому, объясняется сложностью процессов и отсутствием в свое время соответствующих теоретических методов анализа.

## Цель работы

Постановочный уровень динамических задач за пределом упругости предъявляет жесткие требования к физико – математической модели контактирующих элементов. Необходимо единообразие в подходе при рассмотрении упругого и неупругого контактирования, а также доступность и простота использования метода решения контактных задач в инженерной практике и достаточно хорошая сопоставимость с практическими данными. Метод расчета контактных сближений упругопластических гладких тел должен органично сочетаться с подходом применения классических контактных задач теории упругости в расчетах на прочность и жесткость в машиностроении. А применительно к исследованию шероховатых поверхностей, необходимо органичное сочетание с разработанными теориями контактирования шероховатых поверхностей.

Отсутствие универсального подхода при решении этих проблем ставит задачу создания динамической модели упругопластического контактного взаимодействия, которая позволила бы оценивать влияние параметров контактирования (которые являются изме-

няемым величинами при конструировании соединений) на поведение сочленений.

Предлагаемая динамическая модель и созданная на ее основе методика расчета характеристик контакта позволяет учитывать в инженерном расчете величины контактной податливости и прочности при создании точных приборов и механизмов, прецизионного оборудования, конических и цилиндрических прессовых соединений, резьбовых и клепочных соединений, различных передач и подшипников. А это, в свою очередь, способствует увеличению их надежности, долговечности и конкурентоспособности.

## Методы исследования

В работе использовался комплексный метод исследований, включающий теоретические и экспериментальные исследования.

В основе теоретических исследований лежат методы механики контактного взаимодействия, теории упругости и пластичности. Решение основных нелинейных дифференциальных уравнений движения контактирующих тел основано на применении метода разложения в степенные ряды, с обязательным исследованием сходимости и устойчивости решения. Для теоретических расчетов широко применялась вычислительная техника. Решения получены с применением программ Matcad и унифицированного программного комплекса, созданного на алгоритмическом языке Delphi 7 для IBM совместимых компьютеров и для любой операционной системы.

Для экспериментальных исследований использовалась оригинальная установка с использованием лазера при фиксации контактных колебаний. Экспериментальные исследования, выполненные автором, касались оценки предлагаемой методики расчета амплитудно-частотных характеристик упругопластического контакта нормального направления и контактной податливости сопряжений резьбового соединения и соединений с натягом. При проверке точности предложенных в

работе методик расчета широко использовались экспериментальные данные, полученные другими исследователями и опубликованные в литературе.

**Статическая модель контактного взаимодействия**

Для расчета сближения в сопряжении шероховатых тел все контактирующие выступы делят на две группы: выступы, деформирующиеся чисто упруго и выступы, испытывающие пластическую деформацию. Для каждой из этих групп применяют свои формулы, определяющие сближение в контакте. Однако критерии перехода от упругого к упругопластическому взаимодействию носят условный характер, а сближения в контакте, строго говоря, являются упругопластическими с самого начала нагружения. С увеличением нагрузки соотношение между упругим и пластическим сближением изменяется. Как показывают исследования [1, 2], такой подход соответствует современным представлениям о наличии очагов микропластической деформации в материале.

Рассмотрим случай, когда одна из сопрягаемых номинально плоских поверхностей является гладкой, а на второй имеются выступы, вершины которых расположены в общем случае на разных уровнях и имеют разную кривизну.

После приложения нагрузки первыми вступают в контакт наиболее высокие выступы. По мере увеличения сжимающей силы они внедряются в упругопластическое гладкое пространство контртела до того момента, пока в контакт не вступят следующие по высоте выступы и т. д. На первом этапе в некотором диапазоне относительных внедрений число контактирующих неровностей не меняется и равно  $\hat{\epsilon}$  [146]. При достижении определенного внедрения в сопряжение вступает новая группа выступов ( $\hat{\epsilon} + 1$ ). Нагрузка на микронеровности, расположенные в  $i$ -ом слое равна

$$P_i = P'_i n_i, \tag{1}$$

где  $P'_i$  - нагрузка, приходящаяся на единичный выступ;  $n_i$  - число выступов радиуса  $R'$ , расположенных на  $i$ -ом уровне.

Общая нагрузка на контакт есть сумма нагрузок, воспринимаемая всеми микронеровностями

$$P = \sum_{i=1}^{\hat{\epsilon}+1} P'_i n_i. \tag{2}$$

В практических расчетах обычно принимают, что вершины всех выступов имеют одинаковые радиусы закругления, которые соответствуют способу обработки поверхности и её параметру шероховатости. Между тем кривая опорной поверхности не содержит раздельной информации о радиусе вершин выступов и их числе  $n_i$  на каждом уровне, а учитывает эти параметры лишь в интегральной форме. Это дает основание предложить для описания шероховатой поверхности с непрерывной функцией распределения выступов по высоте «одноуровневую» модель, т. е. такую, в которой все выступы имеют одинаковые радиусы вершин и расположены на одном уровне. При таком допущении каждому сближению отвечает свое расчетное число выступов  $n = A_r / A'_r$ , которое определяется из условия равенства фактических площадей контакта в реальном стыке и модели.

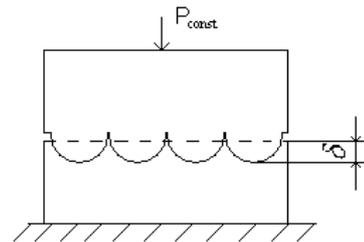


Рисунок 1 – Схема сопряжения твердых тел, поверхность одного тела имеет шероховатость, а другого является гладкой

На основании вышеизложенного применительно к шероховатым поверхностям принята статическая модель, в которой одна из сопрягаемых номинально плоских поверхностей является гладкой, а на второй имеются сферические выступы, вершины которых в общем случае расположены на одном уровне и имеют одинаковую кривизну (рисунок 1). Такой регулярный микрорельеф можно получить, например, при вибрационном обкатывании поверхности детали.

При расчете сближения приняты следующие допущения и условия взаимодействия:

- 1) Силы взаимного прижатия тел нормальны к номинально плоской поверхности стыка;
- 2) Сдвигающие силы на этой поверхности отсутствуют;

3) Взаимное влияние выступов незначительно;

4) Твердость шероховатой поверхности выше, чем гладкой (т.е. при нагружении происходит внедрение выступов в плоскую поверхность контртела);

5) Номинальные контактирующие поверхности в течение всего периода контакта остаются взаимно параллельными;

6) Влияние валика выдавленного материала незначительно и в расчетах не учитывается [3];

Для получения формулы полного сближения в сопряжении номинально плоских шероховатых поверхностей использовалось предложенное И. В. Крагельским и Н. Б. Демкиным уравнение начального участка кривой опорной поверхности

$$\eta_r = \frac{A_r}{A_a} = a_k b \left( \frac{\delta}{R_{max}} \right)^v, \quad (3)$$

где  $A_a$  - номинальная площадь контакта;  $a_k = \frac{\delta_{i\bar{z}} + 0,5\delta_\sigma}{\delta}$  - коэффициент, зависящий от характера деформации в контакте, равный 0,5 при чисто упругом и 1 при пластическом контакте;  $b, v$  - параметры кривой опорной шероховатой поверхности;  $R_{max}$  - наибольшая высота неровностей профиля;

$\delta, \delta_y, \delta_{i\bar{z}} = R_{max} \left( \frac{P}{A_r b H} \right)^{\frac{1}{v}}$  - полное, упругое и остаточное сближения в контакте соответственно.

В соответствии с принятыми допущениями и используя формулу (2) зависимость  $E(\delta)$  можно представить в виде

$$D = k_y n P' = k_y \frac{A_r}{A_r'} P' = \frac{a_k b \delta^v A_a}{R_{max}^v 2\pi R (\delta_{i\bar{z}} + 0,5\delta_\sigma)} k_y P', \quad (4)$$

где  $P$  - полная нагрузка на контакт;  $k_y$  - коэффициент, учитывающий соотношение силы поджатия реальной шероховатой поверхности и модели, является постоянной интегрирования, зависящий от  $v$ ;  $n$  - число выступов в одноуровневой модели;  $P'$  - нагрузка, приходящаяся на единичный выступ;  $A_r$  - фактическая площадь контакта;  $A_r'$  -

фактическая площадь контакта единичной сферической неровности с плоской поверхностью контртела;  $R$  - радиус сферической неровности.

Решая совместно уравнения (2), (3) и (4) получим полное сближение в контакте  $\delta(P)$

$$\delta = \frac{R_{max} P^{\frac{1}{v}}}{(A_r b H)^{\frac{1}{v}} k_y^{\frac{1}{v-1}}}. \quad (5)$$

Входящая в уравнение (5) фактическая площадь контакта формируется в результате процессов, сосредоточенных в приповерхностных слоях контактирующих тел, а поэтому существенным образом зависит от нагрузки и механических свойств поверхности материалов.

В случае контакта двух шероховатых поверхностей рассчитывают параметры эквивалентной поверхности. При этом необходимо в формуле (5) произвести замену:

$$v = v_1 + v_2; \\ R_{max} = R_{max1} + R_{max2}; \quad (6) \\ b = \frac{k_{y1,2} b_1 b_2 (R_{max1} + R_{max2})^{v_1+v_2}}{R_{max}^{v_1} + R_{max}^{v_2}},$$

где индексы 1 и 2 относятся к первой и второй поверхности.

Таким образом, уравнение (5) полностью исчерпывает статическую задачу расчета сближения в упругопластическом контакте шероховатого штампа с плоской поверхностью контртела.

#### Динамическая модель контактного взаимодействия

Для создания динамической модели поведения упругопластического диссипативного контакта в нормальном направлении были приняты некоторые допущения.

1. Шероховатость моделируется сегментами сфер одинакового радиуса, вершины которых в общем случае расположены на одном уровне.

2. Поскольку деформации в зоне контакта превышают на порядок общие деформации тел, то последние в расчете не учитываются [4].

3. Так как объемы выступов малы по сравнению с объемами контактирующих тел, то массу последних можно не учитывать.

4. Контактная сила и контактная деформация связаны той же зависимостью, что и при статическом сжатии [5].

Движение одномассовой колебательной системы с одной степенью свободы применительно к шероховатым телам обусловлено воздействием, подчиняющемуся гармоническому закону  $F \sin \omega t$ . Схема нагружения показана на рисунке 2.

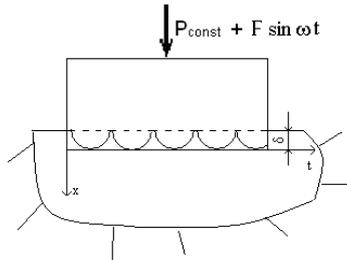


Рисунок – 2 Схема нагружения при нормальном контакте шероховатых тел

Для описания процессов, происходящих в сопряжении шероховатого твердого штампа с упругопластическим полупространством при динамическом воздействии начало координат было помещено в точку статического контакта шероховатого штампа и поверхности.

Дифференциальное уравнение движения в условиях нормальных контактных колебаний имеет вид

$$m\ddot{x} + P(x) = m\ddot{x} + a x^v = F \sin \omega t \quad (7)$$

или

$$\ddot{x} = -\lambda x^v + \lambda' \sin \omega t,$$

где  $P(x)$  – функция, характеризующая восстанавливающие силы и силы рассеяния энергии;  $\lambda = \frac{a}{m}$ ;  $\lambda' = \frac{F}{m}$ ;  $F$  – амплитудное значение внешней вынуждающей нагрузки;

$a = \frac{b H A_r k_y^{v-1}}{R_{max}^v} - \text{const}$ ;  $\omega, t$  – циклическая частота и время воздействия соответственно.

Данная механическая система является нелинейной и обладает значительной диссипацией энергии, поэтому решение дифференциального уравнения движения получили, воспользовавшись разложением искомой функции  $P(x)$  в степенной ряд Тейлора.

Решение дифференциального уравнения (7) описывается выражениями

$$\bar{x}(t) = \begin{cases} \bar{A}_0 + \bar{A}_1 t_1 + \bar{A}_2 t_1^2 + \bar{A}_3 t_1^3 + \bar{A}_4 t_1^4, & 0 \leq t_1 \leq t_1^*; \\ \bar{B}_0 + \bar{B}_2 t_2^2 + \bar{B}_4 t_2^4 + \bar{B}_6 t_2^6, & 0 \leq t_2 \leq t_2^*; \\ \bar{A}_0 + \bar{A}_1 t_3 + \bar{A}_2 t_3^2 + \bar{A}_3 t_3^3 + \bar{A}_4 t_3^4, & 0 \leq t_3 \leq t_3^*; \\ \bar{B}_0 + \bar{B}_2 t_4^2 + \bar{B}_4 t_4^4 + \bar{B}_6 t_4^6, & 0 \leq t_4 \leq t_4^*, \end{cases} \quad (8)$$

где  $t_1^* \dots t_5^*$  – длительность движения на каждом этапе, а  $\bar{A}_i, \bar{B}_i$  – коэффициенты, определяемые по рекуррентным формулам.

Начальными условиями нагружения на первом этапе являются следующие параметры  $t=0, x_i = x_0 = \delta, \dot{x}_i = \dot{x}_0 = v_0$ , где  $\delta$  – статическое сближение, определяемое по формуле (2.18). Начальными условиями движения каждой последующей четверти периода будут конечные условия предыдущей.

Дифференциальное уравнение движения (7) можно использовать и в расчетах нормального контактного взаимодействия при динамическом воздействии с последующим затуханием колебаний системы [6]. В этом случае вынуждающее усилие в правой части уравнения (7)  $F \sin \omega t$  будет равно нулю. Уравнение движения примет вид

$$m\ddot{x} + P(x) = m\ddot{x} + a x^v = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} = -\lambda x^v, \quad (9)$$

Контактные смещения будут определяться в первую очередь начальными условиями движения тела, а именно – величиной начальной скорости движения  $v_0$ , для нахождения которой использовался закон сохранения импульсов.

В случае свободных, затухающих колебаниях не так важен график зависимости  $x(t)$  и  $v(t)$ , как важно знать амплитуду наибольшего сближения и время, при котором динамическое сближение достигнет своего максимума.

После интегрирования уравнения (9) с учетом начальных параметров получили необходимое решение

$$x_{max} = \left[ \frac{(v+1)}{2\lambda} \left( v_0^2 + \frac{2\lambda \delta^{v+1}}{v+1} \right) \right]^{1/v+1}. \quad (10)$$

После разделения переменных и интегрирования получили зависимость, позволяющую рассчитать продолжительность активной стадии нагружения

$$t = \left[ \frac{(v+1)}{2\lambda} \right]^{1/2} \frac{1}{s} \left( x_{max} + \frac{x_{max}^{v+2}}{(v+2)2s^2} - \delta \right). \quad (11)$$

Зависимости (10) и (11) представляют математическую модель, которую можно использовать при оценке наибольшей амплитуды колебательного процесса и продолжительности активного этапа контактного взаимодействия при определенных условиях нагружения шероховатых тел.

Различие значений максимальной амплитуды полученных с помощью степенных рядов, значений, рассчитанных по формуле (10) и экспериментальных значений, в большинстве случаев, не превышает 10–12%.

### Выводы

1. Получена зависимость, которая позволяет рассчитать сближение при статическом взаимодействии твердого шероховатого штампа с гладкой упругопластической поверхностью контртела. Статическое сближение твердых тел при контактном взаимодействии имеет существенное практическое значение, поскольку прямо или косвенно характеризует механическое состояние в сопряжении (упрочнение, запас пластичности и др.). Приведенная зависимость, определяющая глубину статического сближения, выражена через параметры, которые могут быть легко вычислены или получены из опытных данных.

2. Предложенное решение является универсальным, так как позволяет:

- рассчитать параметры контакта шероховатой поверхности с гладкой, вершины выступов которой ограничены произвольной кривизной; для этого необходимо вместо радиусов сфер учитывать приведенные радиусы контактирующих поверхностей;

- производить расчеты в случае, когда гладкая поверхность остается в упругом состоянии, а выступы шероховатого тела подвергаются пластическому сплющиванию;

- производить расчет параметров контакта двух шероховатых поверхностей, используя понятие эквивалентной шероховатой поверхности.

3. Разработана динамическая модель контактного взаимодействия, позволяющая определять характеристики силового упругопластического сопряжения твердых тел при нормальном направлении внешнего воздействия к плоскости контактирования. Универсальность модели заключается в том, что она описывает все стадии контактирования – уп-

ругую, упругопластическую и пластическую, как при статическом, так и динамическом нагружении.

4. Разработанный численный алгоритм является задачей с начальными условиями, который позволяет определять характеристики упругопластического сопряжения при различных видах динамического нагружения (ударном, вибрационном и т.п.). Большая практическая ценность состоит в том, что разработанный метод позволяет анализировать поведение сопряжения от начала нагружения.

5. Впервые приведены аналитические зависимости, позволяющие определять расчетным путем полное сближение в сопряжениях контактирующих тел, как в условиях статики, так и в условиях динамики, а также продолжительность активного периода нагружения в случае упругопластического контакта твердых тел.

6. Разработанные статическая и динамическая модели контактного взаимодействия твердых тел позволяют произвести оценку влияния на характеристики контакта параметров динамического воздействия.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, В. М. Контактные задачи в машиностроении / В. М. Александров, Б. Л. Ромалис. – М. : Машиностроение, 1986. – 174 с., ил.
2. Джонсон, К. Л. Механика контактного взаимодействия / К. Л. Джонсон. – М. : Машиностроение, 1989. – 456 с.
3. Котенева, Н.В. Упругопластический динамический контакт твердых тел: монография / Н. В. Котенева. – Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2011. – 127с.
4. Перфильева, Н. В. Динамическая модель упругого механического контакта в пределах трения покоя: монография / Н. В. Перфильева. – Новосибирск : Наука, 2003. – 151 с.
5. Дрозд М.С., Матлин М.М., Сидягин Ю.И. Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации. – М.: Машиностроение, 1986. – 220 с.
6. Котенёва, Н. В. Упругопластическая модель контактного взаимодействия в условиях свободных колебаний / Н. В. Котенева // Изв. вузов. Машиностроение. – 2009. – №1. – С. 35–43.

**Котенева Н.В.**, к.т.н., доцент кафедры ПМ, e-mail: [kot178@yandex.ru](mailto:kot178@yandex.ru),  
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»