УДК 517.935

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ РАСПЛАВА ПОЛИМЕРА В ЗОНЕ ДОЗИРОВАНИЯ ОДНОЧЕРВЯЧНОГО ЭКСТРУДЕРА КАК ОБЪЕКТА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А.С. Нечаев, В.Н. Митрошин

В данной работе произведен анализ течения расплава полимера в зоне дозирования как объекта с распределенными параметрами. Определено уравнение закона тепломассопереноса для течения расплава в зоне дозирования с учетом внутренних источников тепла при установленных граничных условиях. Полученная математическая модель может служить основой для создания системы автоматического управления температурой расплава полимера в зоне дозирования одночервячного экструдера как системы с распределенными параметрами.

Ключевые слова: расплав полимера, экструдер, зона дозирования, объект с распределенными параметрами, функция диссипации

Введение

При производстве кабелей связи, процесс изолирования токопроводящий жилы является особо важным, так как именно на нем формируются основные эксплуатационные показатели качества продукта. Основным оборудованием в процессе изоляции является одночервячный экструдер, ванны охлаждения и тяговое устройство. Однако именно в экструдере закладываются стержневые параметры изоляции, определяющие эксплуатационные показатели качества.

В экструдере полимер плавиться, расплав доводится до определенной температуры, гомогенизируется и через формующую головку накладывается на жилу. Доведение расплава до необходимой температуры и его гомогенизация происходят в зоне дозирования экструдера, поэтому система управления технологическими параметрами в этой зоне является ключевой. Создание такой системы должно осуществляться на основании математической модели объекта управления, учитывающей его особенности. В настоящее время, для создания систем управления в зоне дозирования, используются математические модели объектов с сосредоточенными параметрами, как более простые. Однако они не дают необходимых показателей точности, заложенной в технических условиях, поэтому управляющие параметры корректируются оператором, основываясь на его опыте и интуиции.

Для описания процесса течения расплава полимера в зоне дозирования следует воспользоваться универсальными физическими законами, которые являются уравнениями равновесия массы, энергии и импульса [1]. Исходя из геометрии элементов экструдера, необходимые уравнения представляются в цилиндрических координатах.

В работах Бостанджияна, Левина, Первадчука, Труфановой и других авторов [2,3,4,5] ставится упор на то, что для описания процесса экструзии более точные модели получаются при использовании цилиндрических координат для учета кривизны рабочих органов экструдера. Однако, это утверждение справедливо с оговоркой: модель достаточно точно может быть описана в прямоугольных координатах при условии, что отношение внешнего диаметра шнека к внутреннему диаметру цилиндра близко к единице.

Построение математической модели.

Из физических свойств расплавов полимеров (довольно низкая теплопроводность и температуропроводность, имеющийся эффект прилипаемости к стенкам шнека и цилиндра и др.), конструирование шнековых машин для переработки полимеров позволяет применять данные допущения для зоны дозирования в экструдере, что как раз дает нам возможность вести описание процесса течения расплава в декартовой системе координат (рисунок 1).Причем следует отметить, что кривизной торцов винтового канала также можно пренебречь, в связи с ее малой величиной в зоне дозирования.

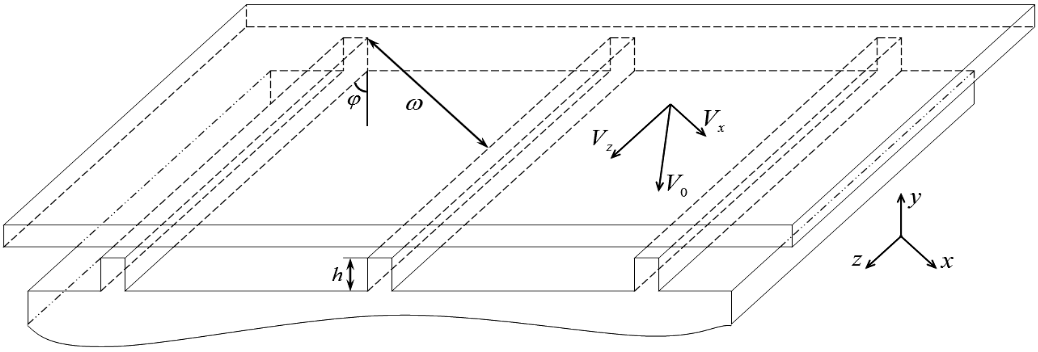

Рисунок 1 – Развернутая модель экструдера, представленная в декартовых координатах

ω – ширина канала; h – глубина канала; φ – угол захода червяка; V_0 – линейная скорость перемещения поверхности цилиндра относительно червяка; V_x, V_z – скорости разложения V_0 по осям x и z соответственно

Согласно уравнению непрерывности (оно же уравнение постоянства массы), скорость накопления массы в некотором объеме равна скорости потока массы в данный объем за вычетом скорости обратного потока массы из этого объема:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho\upsilon_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho\upsilon_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho\upsilon_z)}{\partial z}=0. \quad (1)$$

Уравнение сохранения импульса, при условии малых величин массовых сил и сил инерции в расплаве полимера, запишется в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}; \quad (2а)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}; \quad (2б)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}. \quad (2в)$$

Согласно обобщенному закону первого начала термодинамики, скорость увеличения удельной тепловой энергии в некотором объеме равна сумме скорости поступления энергии за счет теплопроводности и скорости ее диссипации. На основании чего закон сохранения энергии при описании течения расплава полимера в зоне дозирования, в общем виде, может быть записан как:

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\upsilon_x\frac{\partial T}{\partial x}+\upsilon_y\frac{\partial T}{\partial y}+\upsilon_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=$$
$$=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\tau_{xx}\frac{\partial\upsilon_x}{\partial x}+\tau_{yy}\frac{\partial\upsilon_y}{\partial y}+\tau_{zz}\frac{\partial\upsilon_z}{\partial z}+ \quad (3)$$
$$+\tau_{xy}\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial y}+\frac{\partial\upsilon_y}{\partial x}\right)+\tau_{xz}\left(\frac{\partial\upsilon_x}{\partial z}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial x}\right)+\tau_{yz}\left(\frac{\partial\upsilon_y}{\partial z}+\frac{\partial\upsilon_z}{\partial y}\right).$$

В уравнениях (1)–(3): ρ – плотность расплава полимера; C_p – теплоемкость расплава; P – давление; T – температура; λ – коэффициент теплопроводности расплава; υ_i $(i=x,y,z)$ – проекция скорости расплава на соответствующие оси; τ_{ij} – тензоры напряжений сдвига:

$$\tau_{ij}=\eta_a\frac{\partial\upsilon_i}{\partial j},\ (i,j=x,y,z), \quad (4)$$

здесь η_a – эффективная вязкость расплава полимера.

Неизотермический характер течения расплава обусловлен прежде всего значительным диссипативным разогревом, являющимся следствием высокой вязкости полимерных расплавов [6]. Согласно этому же источнику, эффективная вязкость, из реологического уравнения для расплава полимера, описывается степенным законом вида:

$$\eta_a=\mu_0 e^{-b(T(z)-T_0)}\left(\frac{1}{2}I_2\right)^{\frac{1-n}{2n}}, \quad (5)$$

где μ_0 – значение ньютоновской вязкости расплава, n – индекс течения, b – температурный коэффициент вязкости, T – текущая температура, T_0 – температура приведения, I_2 – квадратичный инвариант тензора скоростей деформации, представляемый в прямоугольных координатах как:

$$I_2 = 4\left[\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}\right)^2\right] + 2\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \upsilon_y}{\partial z} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial z} + \frac{\partial \upsilon_z}{\partial x}\right)^2. \quad (6)$$

Для упрощения математической модели примем следующие допущения, неискажающие основных законов течения расплава полимера в зоне дозирования:

- среда является несжимаемой;
- поля скоростей и температур изменяются вдоль оси z намного меньше, чем по двум другим осям;
- течение в направлении оси y существует только в непосредственной близости к стенкам канала;
- вследствие большого отношения ширины винтового канала ω к его глубине h можно предположить, что на некотором расстоянии от стенок канала скорости υ_x и υ_z не зависят от x.

Определим также граничные условия для зоны дозирования:

$$\begin{aligned}
&\upsilon_x = \upsilon_y = \upsilon_z = 0, && \text{при} \quad y = 0, \\
&\upsilon_x = V_x, \quad \upsilon_z = V_z, && \text{при} \quad 0 < x < \omega \quad \text{и} \quad y = h, \\
&T = T_0, && \text{при} \quad z = 0, \\
&\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=R} = q(t), \quad \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,
\end{aligned} \quad (7)$$

здесь R – радиус цилиндра;

$q_i(t) = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial i}\right)$ – тепловой поток i-ой координаты ($i = x, y, z$);

h – глубина канала в зоне дозирования;

ω – ширина канала в зоне дозирования;

V_x, V_z – составляющие линейной скорости V_0 перемещения поверхности цилиндра относительно червяка:

$$V_x = V_0 \sin\varphi, \quad V_z = V_0 \cos\varphi, \quad V_0 = \pi DN,$$

где: D – диаметр шнека (червяка);

φ – угол подъема винтового канала;

N – обороты шнека.

С учетом принятых допущений, закон сохранения энергии для расплава полимера в зоне дозирования запишется в виде:

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \upsilon_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \tau_{xy}\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right) + \tau_{yz}\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}\right), \quad (8)$$

$$I_2 = 2\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}\right)^2. \quad (9)$$

Подставляя (4), (5) и (9) в уравнение (8), получаем следующий вид уравнения для закона сохранения энергии:

$$\rho C\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \bar{V}_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \Phi, \quad (10)$$

где $\bar{V}_z$ – средняя скорость движения расплава полимера вдоль канала шнека;

Φ – функция диссипации, являющаяся внутренним источником тепла, вызванного эффектом межмолекулярного трения молекул полимера при течении расплава. Она определяется выражением:

$$\Phi = \mu_0 \cdot e^{-b(T(z)-T_0)} \cdot \frac{1}{\rho h}\left[\left(\frac{\partial \upsilon_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \upsilon_z}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{n+1}{2n}}. \quad (11)$$

Выводы

Выражения (10) и (11) представляют собой модель, которая может быть применима для описания течения расплава полимера в зоне дозирования как объекта управления с распределенными параметрами. Как видно из вышеприведенных соотношений, специфика описания течения расплава полимера в зоне дозирования такова, что основные параметры течения зависят от полей температуры и скоростей.

Согласно данной модели, зависимостью температуры расплава полимера от продольной координаты канала, а также течениями расплава от глубины канала, принципиально нельзя пренебрегать вследствие того, что именно данными распределениями устанавливаются такие определяющие показатели расплава на выходе экструдера как его эффективная вязкость, степень гомогенизации и другие. Из чего следует необходимость учета данных распределений при синтезе автоматической системы управления параметрами технологического процесса в зоне дозирования и их численной оценки.

Полученная модель является основой для создания системы автоматического регулирования температурой расплава полимера в зоне дозирования одночервячного экструдера как системы с распределенными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К. Раувендаль Экструзия полимеров [Текст]/ Пер. с англ. под ред. А.Я. Малкина/ – СПб.: Профессия, 2008. – 768 с.
2. Бостанджиян, С.А. Течение неньютоновской жидкости в канале винта экструдера в услови-

ях сложного сдвига [Текст] / С.А. Бостаджиян, В.И. Боярченко, Г.Н. Каргополова // Наука и техника. – Минск, 1970. – С. 111–121.
3. Балешов, И.М. Решение некоторых задач, связанных с течением расплавленных полимеров в червячных прессах [Текст] / И.М. Балешов, А.Н. Левин // Хим. Машиностроение. – М.: 1961, №6. – С. 29–33.
4. Басов, Н.И. Гидродинамика и теплообмен при плавлении в винтовом канале шнекового аппарата [Текст] / Н.И. Басов, И.Н. Володин, Ю.В. Казанков [и др.] // Наука. Теоретические основы химической технологии. – М.: 1983, т. 17, №1. – С. 72.
5. Первадчук В.П., Математическая модель плавления полимерных материалов в пластицирующих экструдерах. Влияние физических свойств полимера и режимов переработки на скорость плавления [Текст] / В.П. Первадчук, Н.М. Труфанова, В.И. Янков // Химические волокна. – М.: 1984, №6. – С. 46-48.
6. Торнер Р.В. Теоретические основы переработки полимеров (механика процессов) [Текст] / Р.В. Торнер/ – М.: «Химия», 1977. – 464 с.: ил.

*Аспирант **Нечаев А.С.** тел. 8-902-321-72-09, nechaev-as@mail.ru; д.т.н., проф. **В.Н. Митрошин** - vmitroshin@mail.ru; каф. автоматики и управления в технических системах Самарского государственного технического университета*

УДК 004.41

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОТЛАДКА ЗАВИСИМЫХ ПОТОКОВ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

А.В. Сикерин, Е.Н. Крючкова

В статье рассматривается технология разработки и тестирования параллельного программного обеспечения на основе моделей, обеспечивающих описание многопоточных взаимодействий в параллельных системах. Предложена модель параллельного автомата, исследованы его свойства, предложен подход его использования для тестирования параллельного программного обеспечения.

Ключевые слова: параллельные программирование, отладка многопоточных программ, теория автоматов, model checking, тестирование ПО.

Введение

Снижение стоимости параллельных вычислений, увеличение количества ядер, асинхронная природа пользовательских интерфейсов вынуждают разработчиков использовать многопоточность. Однако параллельные системы намного сложнее, чем последовательное программное обеспечение (ПО). Промышленное ПО часто подвержено изменениям, при каждом из них разработчик обязан обеспечивать требуемое поведение ПО. Возрастают размеры и сложность параллельных систем, что означает, увеличение стоимости производства параллельного ПО. Более того, порядок многопоточных взаимодействий в параллельной системе не детерминирован, и необходимо обеспечить корректное поведение параллельной системы для всех возможных исполнений.

Это приводит к острой необходимости создания новых принципов разработки инструментов для анализа, отладки и тестирования параллельных алгоритмов. Инструменты автоматического анализа позволяют разработчику непрерывно обеспечивать требуемые свойства, тестировать, поддерживать высокое качество ПО. Такие инструменты можно рассматривать как некоторое сито, через которое отсеиваются все версии ПО с неправильным поведением.

Проблемы параллельного программирования

Написание параллельного ПО согласно заданной спецификации является задачей хотя и трудной, но, в общем-то, выполнимой. Гораздо сложнее сохранить требуемые инварианты при модификациях. Широко распространёнными при разработке параллельного ПО являются следующие виды ошибок:

- гонки данных (data races);
- тупики (deadlocks);
- потоки в состоянии ожидания (stalled threads);
- потерянные сигналы (lost signals);
- заброшенные замки (abandoned locks).

Модель многопоточных взаимодействий в параллельных системах

На основе метаинформации, содержащейся в коде программы, построим математическую модель параллельного алгоритма как абстракцию вычислительного процесса. Модель строится в предположении, что код и модель – это одно целое. Рассмотрим поведение параллельного алгоритма как работу