

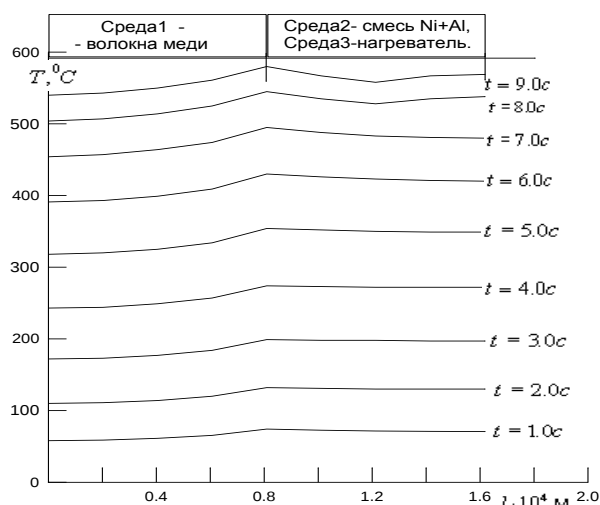


Рисунок 5 - Профиль температуры по оси ячейки ККМ (ч/з 1 секунду СВЧ)

3. При регистрации температуры термоиндикаторным методом погрешности не превысили 4,5 %.
4. Проведен расчет температурного поля в предреакционный период при электро-

синтезе ККМ с учетом контактных явлений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рябцев И.А. Наплавка деталей машин и механизмов. [Текст] /И.А.Рябцев/ -Киев: Экотехнология, 2004.
2. Бычковский Р.В. Контактные датчики температуры. [Текст] /Р.В. Бычковский/ -М.: Металлургия. -1978.
3. Сегерлинд Л.Дж. Применение метода конечных элементов. [Текст] /Л.Дж. Сигерлинд/ - М: Мир.1979.
4. Хольм Р. Электрические контакты. [Текст] /Р.Хольм/ - М: ИЛ.1961.
5. Дмитриев С.Ф. СВ-электросинтез смесей порошков Ni+Al на подложке из Al [Текст] /С.Ф. Дмитриев// - Вестник ТГУ. Бюлл. № 24. 2004. Апрель. С. 108-112.

К.т.н., доцент **Иванайский В.В.** (3852)-62-83-80; e-mail: olg168@rambler.ru, д.т.н., профессор **Ишков А.В.**, ст. преп. **К.В. Селиверстов** - Алтайский государственный аграрный университет; к.т.н., доцент **С.Ф. Дмитриев** - Алтайский государственный университет (г. Барнаул)

УДК 681.5

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОСВЯЗНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В.А. Каширин

В статье рассматривается применение метода штрафных функций для решения задачи параметрической оптимизации многосвязной динамической системы. Описанный метод позволяет перейти от задачи условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации. Рассматривается пример параметрического синтеза системы активного управления подвеской транспортного средства.

**Ключевые слова:** параметрическая оптимизация, активное управление, штрафные функции

#### Введение

Целью работы является использование методов оптимизации при решении задач синтеза различных многосвязных систем на основе матричного уравнения Ляпунова, применяемого в задачах синтеза стабилизирующей обратной связи. В процессе решения удастся свести исходную задачу к задаче математического программирования. Одним из наиболее популярных методов решения задач математического программирования является метод штрафных функций [1]. Данный метод позволяет перейти от задачи условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации. В свою очередь для решения задачи безусловной оптимизации можно применить

методы прямого поиска, не требующие вычисления градиента целевой функции. В данной работе метод штрафных функций применяется для решения задачи параметрической оптимизации многосвязной динамической системы [2]. Рассматривается пример параметрического синтеза системы активного управления подвеской транспортного средства.

#### Норма системы

Рассмотрим линейную стационарную систему, поведение которой в пространстве состояний описывается уравнениями

$$\dot{x} = Ax, y = Cx, \quad (1)$$

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОСВЯЗНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

где  $x$  - вектор состояния,  $y$  - вектор выхода. Будем считать, что система (1) является асимптотически устойчивой и полностью наблюдаемой [3]. Систему (1) будем рассматривать как линейный оператор, действующий из линейного векторного пространства  $X$  начальных состояний в линейное векторное пространство  $Y$  функций выхода  $S: X \rightarrow Y$ . Введем нормы в пространствах  $X$  и  $Y$ . В пространстве начальных состояний – евклидову норму

$$\|x(0)\| = \sqrt{x^T x(0)}.$$

В пространстве функций выхода – норму пространства  $L_2(R_+)$

$$\|y(0)\| = \sqrt{\int_0^\infty y^T(t)y(t)dt}.$$

Норма системы (1) как норма линейного оператора определяется соотношением норм пространства выходных сигналов к пространству начальных состояний

$$\|S\| = \sup_{x(0) \neq 0} \frac{\|y\|}{\|x(0)\|}$$

Утверждение. Норма системы (1)

$$\|S\| = \sqrt{\lambda_{\max}(L)},$$

где  $L$  - единственное симметричное положительно определенное решение уравнения Ляпунова  $LA + A^T L = -C^T C$ ,  $\lambda_{\max}(L)$  - максимальное собственное число  $L$ . Доказательство этого утверждения представлено в [2].

## **Задача параметрической оптимизации**

Предположим, что поведение проектируемой динамической системы описывается уравнением

$$\dot{x} = A(p)x, \quad (2)$$

где  $x$  - вектор состояния,  $p$  - вектор параметров, значения которых надлежит выбрать. Если уравнение (2) описывает замкнутый статической или динамической обратной связью объект управления, то вектор  $p$  может состоять из параметров объекта управления и регулятора. Система должна быть асимптотически устойчивой и обладать приемлемой реакцией на изменения начального состояния. Уравнение (2) дополним уравнением выхода

$$y = C(p)x. \quad (3)$$

Будем считать, что область допустимых значений параметров  $P$  задана в виде:

$$p_{\min} \leq p \leq p_{\max}.$$

Задачу синтеза системы (2), (3) рассмотрим как задачу параметрической оптимизации. Необходимо найти минимум нормы системы (2), (3)

$$\min_{p \in P} \sqrt{\lambda_{\max}(L)}$$

при условии

$$LA(p) + A^T(p)L = -C(p)^T C(p), L > 0.$$

Заметим, что положительная определенность  $L$  гарантирует асимптотическую устойчивость системы (2), единственность и симметричность решения уравнения Ляпунова. Введем новую переменную  $\gamma$  и дополнительное ограничение  $\gamma E - L > 0$ , где  $E$  - единичная матрица.

Условие положительной определенности  $L$  можно записать в виде системы неравенств (критерий Сильвестра):

$$\Delta_1(L) > 0, \dots, \Delta_n(L) > 0,$$

где  $\Delta_i(L)$  - главные диагональные миноры  $L$ ,  $n$  - размер вектора  $x$ .

С учетом проведенных замен, задача поиска минимума нормы системы (2), (3) может быть сформулирована как стандартная задача нелинейного программирования с ограничениями.

$$\min \gamma$$

Найти  $p \in P$  при условии

$$LA(p) + A^T(p)L = -C(p)^T C(p),$$

$$\Delta_1(L) > 0, \dots, \Delta_n(L) > 0, \quad (4)$$

$$\Delta_1(\gamma E - L) > 0, \dots, \Delta_n(\gamma E - L) > 0.$$

Проблеме учета ограничений в задачах математического программирования уделено много внимания. Во многих случаях ее решают с помощью штрафных функций. Вся суть метода внешней точки сводится к поиску условного минимума методом безусловной минимизации, неявно учитывая ограничения путем “наложения штрафа” на целевую функцию в точках, которые вышли из допустимого множества. Полученное решение задачи без ограничений будет совпадать с точкой минимума исходной задачи с ограничениями. Общий вид вспомогательной функции для задачи (4):

$$U(p, \lambda) = f(p) + \lambda \Psi(p), \lambda > 0,$$

где  $\lambda$  - величина штрафа за невыполнение ограничений,  $\Psi(p)$  - вещественнозначная функция, “штрафующее воздействие” которой регулируется вектором  $\lambda$ .

Методы внешнего штрафа определяются на всем пространстве параметров. В области определения задачи слагаемое  $\Psi(p)$  принимает нулевые значения, а вне ее - положительно и возрастает с увеличением невязок ограничений. Наиболее распространенными способами задания функций  $\Psi(p)$  являются следующие:

$$\Psi(p) = - \sum_{i=1}^m \min[0, g_i(p)] + \sum_{j=1}^l |h_j(p)| -$$

кусочно-линейная штрафная функция, а также

$$\Psi(p) = \sum_{i=1}^m [\min(0, g_i(p))]^2 + \sum_{j=1}^l h_j^2(p) -$$

квадратичная функция штрафа. Здесь слагаемые  $g_i(p)$  - ограничения неравенства, а  $h_j(p)$  - ограничения равенства задачи (4). Полученную вспомогательную функцию можно минимизировать разными способами. Для минимизации функций нескольких переменных можно использовать функцию `fminsearch` из библиотеки Optimization Toolbox системы Matlab. Поиск минимума основан на симплекс-методе Нелдера - Мида, который сводится к построению симплекса в  $n$ -мерном пространстве, заданного  $n+1$  вершиной. В двумерном пространстве симплекс является треугольником, а в трехмерном - пирамидой. На каждом итерационном шаге значение функции в новой точке (приближенном решении) сравнивается со значениями функции в вершинах симплекса. В результате новая точка заменяет ближайшую вершину симплекса. Итерации повторяются до тех пор, пока размеры симплекса не станут меньше заданной погрешности метода.

Кратко опишем алгоритм работы метода внешнего штрафа:

0. Выбор величины штрафующего коэффициента  $\lambda_0$  и точек начального приближения  $p_0$ .

1.  $k$ -я итерация. Полученную вспомогательную функцию для задачи (4) минимизируем выбранным методом прямого поиска. Получаем локальный минимум  $U^*(p_k, \lambda_k)$ .

2. Если  $U^*(p_k, \lambda_k) - U^*(p_{k-1}, \lambda_{k-1}) > \varepsilon$ , то увеличиваем штрафной коэффициент  $\lambda_{k+1}$ . Точками нового приближения для функции  $U(p_{k+1}, \lambda_{k+1})$  будут последнее полученное

решение при старом штрафном коэффициенте.

3. Если  $U^*(p_k, \lambda_k) - U^*(p_{k-1}, \lambda_{k-1}) < \varepsilon$ , то решение найдено. Локальный минимум  $U^*(p_k, \lambda_k)$  является глобальным минимумом решаемой задачи без ограничений, а также и исходной задачи с ограничениями.

### Оптимизация системы активного управления подвеской транспортного средства

В качестве примера рассмотрим задачу проектирования системы активного управления подвеской транспортного средства как задачу параметрической оптимизации линейной многосвязной системы. Объект управления представлен на рисунке 1.

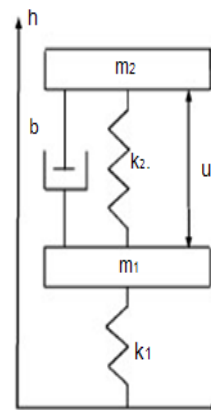


Рисунок 1 - Объект управления - механическая система, состоящая из двух масс (колеса и корпуса транспортного средства), соединенных пружиной и демпфером.

Динамика системы в отклонениях от положения равновесия описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= v_1, \\ m_1 \dot{v}_1 &= -k_1 h_1 + k_2 (h_2 - h_1) + b(v_2 - v_1) - u, \\ \dot{h}_2 &= v_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$m_2 \dot{v}_2 = -k_2 (h_2 - h_1) - b(v_2 - v_1) + u,$$

где  $h_1, h_2$  - вертикальное перемещение колеса и корпуса (м);

$v_1, v_2$  - скорость перемещения колеса и корпуса (м/с)

$m_1, m_2$  - масса колеса и корпуса (в расчете на одно колесо) (кг)

$k_1, k_2$  - коэффициент жесткости колеса и рессоры (Н/м)

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОСВЯЗНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

$b$  - коэффициент демпфирования амортизатора (Н\*с/м)

$u$  - управляющая сила (Н)

В положении равновесия значения переменных состояния и управления равны нулю. Необходимо построить управление в виде обратной связи, которое обеспечивает приемлемую реакцию системы на изменения начального состояния. Пусть измеряется только ускорение перемещения корпуса. Управление будем строить в виде стационарной обратной связи  $u = p_1 \dot{v}_2$ , где  $p_1$  - коэффициент обратной связи.

В процесс оптимизации включим параметр  $p_2$  - коэффициент демпфирования амортизатора. Матрица замкнутой системы

$$A(p) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ (k_1 m_2 + k_2 m_2 - k_1 p_1) & -\frac{1}{p_2 m_2} & \frac{0}{k_2 m_2} & \frac{0}{p_2 m_2} \\ \frac{0}{m_1(m_2 - p_1)} & \frac{0}{m_1(m_2 - p_1)} & \frac{0}{m_1(m_2 - p_1)} & \frac{1}{m_1(m_2 - p_1)} \\ \frac{k_2}{m_2 - p_1} & \frac{p_2}{m_2 - p_1} & -\frac{k_2}{m_2 - p_1} & -\frac{p_2}{m_2 - p_1} \end{bmatrix}$$

В качестве переменных выхода возьмем перемещения колеса и корпуса

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметры объекта заданные при оптимизации:  $m_1=345$ ;  $m_2=2300$ ;  $k_1=510000$ ;  $k_2=78000$ . Полученное значение минимума нормы  $\|S\| = 0,44$  достигается при значении параметров  $p_1=1678$  и  $p_2=6982$ . График поверхности вспомогательной функции представлен на рисунке 2.

Рассмотрим реакцию системы на изменение скорости перемещения колеса  $v_1(0) = 2$  м/с. На рисунке 3 для сравнения приведены графики переходных процессов перемещения корпуса транспортного средства.

Полученные результаты доказывают улучшение переходных процессов при оптимальном значении обратной связи  $p_1$  в отличие от системы без активного управления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации. [Текст]/ Ф.П. Васильев/- М: Изд-во Факториал Пресс, 2002 - 824 с.
2. Перепелкин, Е.А. Задача параметрического синтеза многосвязной динамической системы. [Текст]/ Е.А. Перепелкин// - Вестник ТГУ.-№1. Томск: Изд-во ТГУ, 2008-с.23-27.

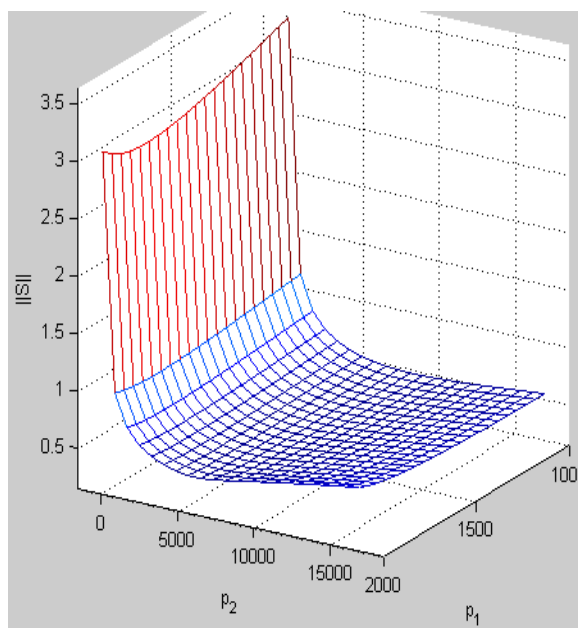


Рисунок 2 - График поверхности минимизируемой функции.

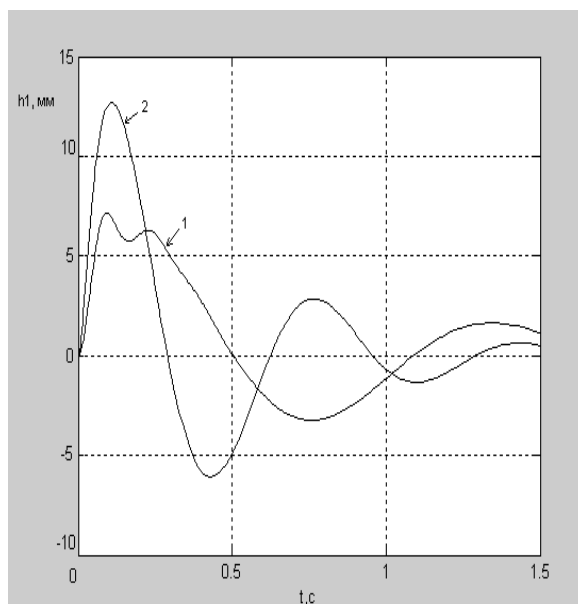


Рисунок 3. Кривая 1- график перемещения корпуса транспортного средства при оптимальной обратной связи  $p_1 = 1678$ , кривая 2 – при отсутствии обратной связи  $p_1 = 0$ .

3. Параев, Ю.И. Линейные матричные уравнения в задачах анализа и синтеза многосвязных динамических систем. [Текст]/ Ю.И. Параев, Е.А.Перепелкин/ - Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2000. - 117 с.

Аспирант **Каширин В.А.** тел. 8-923-403-18-23, kashirin.vyacheslav@gmail.com - каф. прикладной математики, факультет информационных технологий, Алтайский государственный технический университет