

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

И.Е. Мигалёв

В статье рассматривается моделирование электромагнитного поля на ЭВМ с помощью метода конечных разностей во временной области. Приведено краткое описание алгоритма Yu .

Ключевые слова: моделирование электромагнитного поля, уравнения Максвелла, алгоритм Yu , метод конечных разностей во временной области, метод конечных элементов.

Уравнения Максвелла, впервые сформулированные в 1870 году, описывают зависимости между электрическим и магнитным полем в пространстве. Известны несколько точных решений [1, 2] этих уравнений для различных упрощённых условий. Сегодня, в связи со стремительным развитием информационных технологий, для решения этих дифференциальных уравнений всё чаще применяются численные методы [3].

Основными методами являются проекционные, в которых решение проецируется на какой-либо удобный функциональный базис, и дискретизационные, в которых область пространства разбивается на множество малых конечных областей. Две категории универсальных дискретизационных методов, получивших сегодня наибольшее распространение, это метод конечных элементов [4, 5] и метод конечных разностей во временной области [6, 7]. Метод конечных элементов применяется для расчёта задач электростатики, магнитостатики и квазистационарных явлений. Метод конечных разностей во временной области был разработан специально для решения уравнений Максвелла, в которых изменение электрического и магнитного поля во времени зависит от изменения, соответственно, магнитного и электрического поля в пространстве. В рамках этого метода область пространства и временной интервал подвергаются равномерной дискретизации с заданием начальных условий.

К преимуществам метода конечных разностей во временной области относят [6]:

1. Простота реализации – для расчётов не применяется линейная алгебра, которая в случае применения других методов ограничивает размеры пред-

метной областью всего 10^6 неизвестными величинами.

2. Поскольку метод работает во временной области, он позволяет получить результат для широкого спектра длин волн за один расчет. Это может быть полезно при решении задач, в которых не известны резонансные частоты или в случае моделирования широкополосных сигналов.
3. Позволяет создавать анимированные изображения распространения волны в счетном объеме.
4. Удобен при задании анизотропных, дисперсных и нелинейных сред.
5. Метод позволяет непосредственно моделировать эффекты на отверстиях, так же как эффекты экранирования, причем поля внутри и вне экрана могут быть рассчитаны как напрямую, так и нет.

Сущность конечно-разностных методов состоит в замене частных производных в каждой точке пространства конечными разностями, зависящими от значений параметра в соседних точках пространства. Метод конечных разностей во временной области добавляет также временное измерение.

Данный метод позволяет провести симуляцию (модельный эксперимент) и проследить эволюцию электромагнитного процесса во времени.

В основу метода конечных разностей во временной области положены на уравнения Максвелла для области, не имеющей свободных электрических и магнитных зарядов [6].

Закон Фарадея:

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{M}. \quad (1)$$

Закон Ампера:

$$— \quad (2)$$

Закон Гаусса для электрического поля:

$$(3)$$

Закон Гаусса для магнитного поля:

$$(4)$$

В выражениях (1 – 4) приняты следующие обозначения:

- напряжённость электрического поля;
- плотность электрического потока;
- напряжённость магнитного поля;
- плотность магнитного потока (вектор магнитной индукции);
- плотность электрического тока;
- плотность эквивалентного магнитного тока.

Знаком обозначен оператор Гамильтона [8].

Конечно-разностный метод требует предварительного разбиения пространства на области. Параметры электрического поля внутри области принимаются равномерно распределёнными, что приводит к некоторой «ступенчатости» расчётных данных (это считается недостатком метода по сравнению с методом конечных элементов, который позволяет более гибко задавать размеры ячеек). Эта проблема решается двумя способами:

1. Общим уменьшением масштаба размерной сетки для всего счётного пространства.
2. Локальным повышением детализации (уменьшением масштаба сетки) вблизи от объектов сложной формы [9].

Разбиение пространства обычно происходит на одномерные кубы. Размер одного куба рекомендуется делать в 10–20 раз меньше длины исследуемой волны [6].

Кейном Йи [10] предложено оригинальное смещение точек приложения различных параметров электромагнитного поля по отношению к ячейке размерной сетки (вокселю). Расположение векторов представлено на рисунке 1, расположение куба внутри вокселя – на рисунке 2.

Сам алгоритм расчёта является рекурсивным: параметры электрического поля в каждый момент времени рассчитываются на основании параметров магнитного поля в предыдущий момент времени; параметры электромагнитного поля рассчитываются на основании параметров электрического поля. Важным фактором является смещение век-

торов электрического и магнитного поля на половину временного шага и половину пространственного шага друг относительно друга (что иллюстрируется кубом Йи) [10, 6, 11].

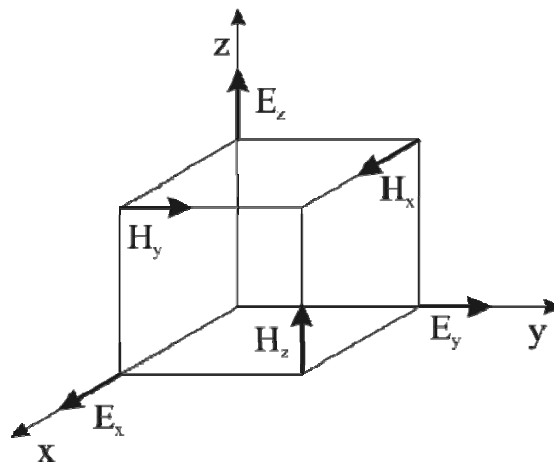


Рисунок 1 – Расположение векторов E и H на кубе Йи

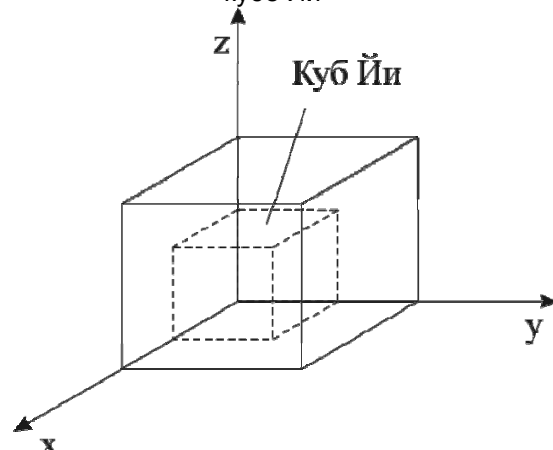


Рисунок 2 – Расположение куба Йи внутри вокселя

Самый простой вариант алгоритма Йи позволяет моделировать развитие электромагнитного процесса внутри вещества, обладающего линейными изотропными недисперсными электромагнитными параметрами, откуда следуют два важных равенства:

$$(5)$$

$$(6)$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость материала;

ϵ_r – относительная диэлектрическая проницаемость материала;

ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума;

μ – магнитная проницаемость материала;

μ_r – относительная магнитная проницаемость материала;

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Для отдельных компонентов векторов получим шесть связанных уравнений Максвелла [3]:

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma^m H_x - M_{sourceX} \right); \quad (7)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma^m H_y - M_{sourceY} \right); \quad (8)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma^m H_z - M_{sourceZ} \right); \quad (9)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial y} - \sigma^m E_x - J_{sourceX} \right); \quad (10)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} - \sigma^m E_y - J_{sourceY} \right); \quad (11)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x} - \sigma^m E_z - J_{sourceZ} \right). \quad (12)$$

Уравнения (7–12) могут быть решены с помощью метода конечных разностей [8].

Алгоритм конечных разностей во временной области применим для расчёта различных классов объектов:

1. Статические источники электрического и магнитного поля (можно проследить эволюцию электромагнитного поля вблизи статического источника в момент его активации).
2. Источники периодических колебаний электрического и магнитного поля (можно проследить распространение колебаний во времени и пространстве).
3. Источники аperiodических колебаний электрического и магнитного поля. Может быть изучено влияние на электромагнитную обстановку источников колебаний любой формализуемой формы.
4. Изотропная среда.
5. Анизотропная среда.
6. Среда с параметрами, зависящими от частоты колебаний электромагнитного поля (например, плазма [11]).

Метод конечных разностей во временной области – современный метод исследования и моделирования электромагнитного поля, который применяется в промышленности и научных исследованиях. Его применение целесообразно в случае, когда необходимо одновременно контролировать широкие диапазоны частот на небольших областях пространства (здания, помещения). Возможно его применение, например, для проверки электромагнитной обстановки на соответствие нормам СанПиН (на этапе обработки полученных экспериментальных данных).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Теория поля. — Издание 7-е, исправленное. — М.: Наука, 1988. — С. 128-130. — («Теоретическая физика», том II). — ISBN 5-02-014420-7
2. Берклеевский курс физики. Том 2. Парселл Э. Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1971.
3. Chew W. C., Jin J., Michielssen E., Song J. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics. — Artech House, 2001. — ISBN 1-58053-152-0
4. Сильвестер П. и Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. — М.: Мир, 1986. — 336 с.
5. Monk, P. Finite Element Methods for Maxwell's Equations. — Clarendon Press, Oxford, 2003.
6. Taflove, Allen (2005). Computational Electrodynamics: the finite-difference time-domain method.—2nd ed. / Allen Taflove, Susan C. Hagness.
7. Jin, J. The Finite Element Method in Electromagnetics. — 2nd. — Wiley-IEEE Press, 2002. — ISBN 0-47143-818-9
8. Гаврилом, В. Р. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / В. Р. Гаврилом, Е. Е. Иванова, В. Д. Морозова. Математика в техническом университете VII, издательство МГТУ имени Н. Э. Баумана.
9. A. Taflove, K. R. Umashankar, B. Beker, F. A. Harfoush, and K. S. Yee (1988). «Detailed FDTD analysis of electromagnetic fields penetrating narrow slots and lapped joints in thick conducting screens». Antennas and Propagation, IEEE Transactions on 36: 247–257.
10. Kane Yee (1966). "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media". IEEE Transactions on Antennas and Propagation 14 (3): 302–307. Bibcode 1966ITAP...14..302Y. doi:10.1109/TAP.1966.1138693.
11. Sullivan, Dennis M. (2000). Electromagnetic simulation using the FDTD method / Dennis M. Sullivan: IEEE Microwave Theory and Techniques Society, sponsor.

Мигалёв Иван Евгеньевич, Алтайский государственный технический университет им. И. И. Ползунова, аспирант кафедры ЭПБ, E-mail: neverthness@gmail.com