

АНАЛИЗ РЕЗОНАНСНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ДВС

В.С. Попович, А.А. Жердев

Работа машино-тракторного агрегата в эксплуатационных условиях вследствие неустойчивости возбуждений характеризуется значительной неустойчивостью угловых скоростей всех сечений валопровода. Особую неприятность представляет эта неустойчивость при эксплуатации вблизи резонансного режима. Торсиографирование и динамометрирование валопроводов тракторов Т-4, Т-4А и ДТ-75М показывает, что резонансные кривые, снятые в полевых условиях, имеют менее острые растянутые резонансные пики. В данной статье предложена методика расчета процесса однократного прохода через резонанс, а «размывание» резонансных пиков при неустойчивом возбуждении рассматривается как многократный проход через резонанс.

Ключевые слова: машино-тракторный агрегат, эксплуатационные условия, динамометрирование, «размывание», резонансный метод, резонансные кривые, резонансные пики.

В основе современных практических методов расчета резонансных крутильных колебаний валов установок с поршневыми двигателями внутреннего сгорания приняты следующие положения:

- упругая кривая формы колебаний при резонансе подобна упругой кривой формы свободных колебаний вала при отсутствии демпфирования;

- при действии на линейную колебательную резонирующего гармонического возбуждающего момента имеет место сдвиг приложения этого момента на угол 90° градусов. При этом во времени максимум отклонения отстает от максимума возбуждающей силы на четверть периода колебаний (вектор P опережает вектор x на 90°).

Можно характеризовать реальный резонанс (в системе с трением) как колебания с максимальной возможной амплитудой при данном возбуждении и трении, так как вся работа возбуждающей силы расходуется на поглощение потерь от силы сопротивления. Практическая задача при борьбе с нежелательными колебаниями заключается прежде всего во избежание резонанса.

На рисунке 1 ярко выражены проходы через резонанс на осциллограмме деформации от крутильных колебаний в седьмой щеке коленчатого вала двигателя 6Ч 13/14 [1].

Рассмотрим однократный проход через резонанс одномассовой крутильной системы под действием момента с постоянной амплитудой M_n и переменной частотой:

$$\eta(t) = \eta_0 t + \frac{\pi t^2}{2}, \quad (1)$$

где η_0 — начальная частота; ε — постоянная скорость изменения частоты (скорость прохода через резонанс).

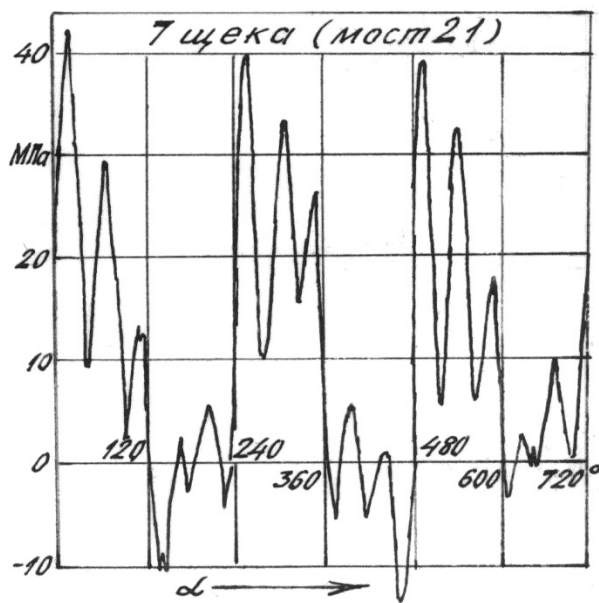


Рисунок 1 – Экспериментальный график изменения напряжения (осциллограммы) в 7 щеке коленчатого вала двигателя 6Ч 13/14 $N_e = 127$ кВт, $n = 1700$ мин $^{-1}$

Динамическая частота возмущающего момента равна

$$\nu = \frac{d\eta(t)}{dt} = \eta_0 + \varepsilon t. \quad (2)$$

Дифференциальное уравнение движения системы имеет вид

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + \omega_n^2 \varphi = m_n \sin \eta(t), \quad (3)$$

где $2n = \frac{K}{I_c}$; $\omega_0^2 = \frac{c}{I_0}$; $m_n = \frac{M_n}{I_2}$; K - коэффициент скоростного сопротивления; ω_0 - собственная частота системы; I_c - момент инерции сосредоточенной массы системы; c - жесткость упругого элемента.

Общее решение уравнения (3), как обычно, имеет вид

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2; \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi &= e^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{\omega_0^2 - n^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega_0^2 - n^2} t \right) = \\ &= ae^{-nt} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - n^2} t - \beta \right), \end{aligned}$$

φ_2 - частное решение, которое в общем случае не выражается через элементарные функции.

Ниже дается приближенное решение задачи, которое мало отличается по форме от решения для стационарного колебательного процесса и в то же время при приемлемой точности охватывает большое число случаев, имеющих практическую ценность.

Частное решение φ_2 получим, преобразовав уравнение (3).

Введем новую независимую переменную

$$z = \eta(t) = \eta_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (5)$$

Тогда, учитывая формулу (2), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{d\varphi}{dz} \frac{dz}{dt} = v \frac{d\varphi}{dz} \text{ и} \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \varepsilon \frac{d^2\varphi}{dz^2} + v^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (3), получаем

$$v^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2} + (\varepsilon + 2nv) \frac{d\varphi}{dz} + \omega_0^2 \varphi = m_n \sin z.$$

В итоге имеем уравнение с периодической правой частью n переменными коэффициентами. Легко видеть, что быстрота изменения их зависит от порядка величины ε - скорости изменения динамической частоты $\varepsilon = dv/dt$.

Подставив $t = (v - \eta_0)/\varepsilon$ в выражение для z , имеем:

$$z = \eta_0 \frac{v - \eta_0}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{v - \eta_0}{\varepsilon} \right)^2 = \frac{v^2 - \eta_0^2}{2\varepsilon}; \quad (9)$$

$$\text{или } v^2 = \eta_0^2 + 2\varepsilon z.$$

Относительные изменения коэффициентов, при возрастающей v в уравнении (8), могут быть записаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{dv^2}{dz} &= \frac{2\varepsilon}{v^2} \leq \frac{2\varepsilon}{\eta_0^2} = \delta_1 \\ \delta_2 &= \frac{1}{\varepsilon + 2nv} \frac{d(\varepsilon + 2nv)}{dz} = \frac{2n}{\varepsilon + 2nv} \cdot \frac{1}{2v} \frac{dv^2}{dz} = \\ &= \frac{2\varepsilon n}{(\varepsilon + 2nv)v} \leq \\ &\leq \frac{2\varepsilon n}{(\varepsilon + 2n\eta_0)\eta_0} < \delta_1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Введем относительную скорость прохода через резонанс $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\omega_0}$, относительную начальную скорость прохода $\bar{\eta}_0 = \frac{\eta_0}{\omega_0}$ и относительный коэффициент затухания $\bar{\eta} = \frac{n}{\omega_0}$.

Если проход начинается при начальном значении динамической частоты, меньшей собственной частоты системы $\eta_0 < \omega_0$, то $\bar{\eta}_0 < 1$ ($\bar{\eta} = 1$ соответствует началу движения с динамической частотой, равной собственной частоте). Если рассматривать только периодические вынужденные колебания, то $n < \omega_0$ и $\bar{\eta} < 1$. Для достаточно медленного прохода через резонанс $\bar{\varepsilon}$ должна быть малой величиной. В таком случае относительными изменениями коэффициентов в уравнении (8) можно пренебречь и рассматривать их как постоянные при дифференцировании. Точнее, в процессе прохода через резонанс они будут медленно меняющимися.

Пренебрегая изменением коэффициентов в выражении (8) в малой окрестности фиксированного значения переменной z , как и в теории колебаний с постоянными коэффициентами, получим частное решение

$$\varphi_2 = \frac{m_n \sin(z - \gamma)}{\sqrt{(\omega_0^2 - v^2)^2 + (\varepsilon + 2nv)^2}}, \quad (11)$$

$$\text{где } \gamma = \arctg \frac{\varepsilon + 2nv}{\omega_0^2 - v^2}.$$

Здесь амплитуда

$$\Phi(z) = \frac{m_n}{\sqrt{(\omega_0^2 - v^2)^2 + (\varepsilon + 2nv)^2}}$$

будет меняться в процессе прохода через резонанс. Около стационарного резонанса даже малое изменение v может в общем случае вызвать значительное изменение $\Phi(z)$.

Выразим $\Phi(z)$ через безразмерные ве-

$$(9) \text{ личины } \bar{v}, \bar{\varepsilon}, \bar{n}, m = \frac{m_n}{\omega_0^2};$$

$$\Phi(z) = \frac{m_n}{\sqrt{(1 - \bar{v})^2 + (\bar{\varepsilon} + 2\bar{n}\bar{v})^2}}$$

Производная по z дает выражение

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{d\Phi}{d\bar{v}} \cdot \frac{d\bar{v}}{dz} = \frac{d\Phi}{d\bar{v}} \cdot \frac{\varepsilon}{\bar{v}} = \frac{2\bar{h} - [\bar{v}(1 - \bar{v}^2) + \bar{n}(\varepsilon + 2\bar{n}\bar{v})^2]}{\sqrt{[(1 - \bar{v}^2)^2 + (\varepsilon + 2\bar{n}\bar{v})^2]^3}} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\bar{v}} \quad (12)$$

Определяем относительное изменение амплитуды в единицу «времени» z

$$\delta = \left| \frac{\Phi'}{\Phi} \right| = \frac{2[\bar{v}(1 - \bar{v}^2) - \bar{n}\varepsilon + 2\bar{n}\bar{v}]}{(1 - \bar{v}^2)^2 + (\varepsilon + 2\bar{n}\bar{v})^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\bar{v}} \quad (13)$$

Расчеты показывают, что δ можно сделать достаточно малой величиной выбором $\bar{\varepsilon}$ и \bar{n} . Например, для значений:

$$\bar{n} \leq 0,01, 2\bar{n} \geq 1 \text{ имеем } \delta \leq 0,02;$$

$$\bar{n} \leq 0,001, 2\bar{n} \geq 0,1 \text{ имеем } \delta \leq 0,01;$$

$$\bar{n} \leq 0,0001, 2\bar{n} \geq 0,01 \text{ имеем } \delta \leq 0,001 \text{ и т. д.}$$

Ограничения, накладываемые на \bar{n} и $\bar{\varepsilon}$, можно характеризовать как случаи относительно медленного прохода через резонанс с относительно большим сопротивлением.

Учитывая, что $\bar{z} = \frac{v^2 - v_0^2}{2\varepsilon}$ получим число циклов крутящего момента до стационарного резонанса:

$$i \approx \frac{\pi_{\text{рез}}}{2\pi} = \frac{1 - \bar{\eta}_0^2}{4\pi\bar{\varepsilon}}$$

Если проход начинается с $\bar{\eta}_0 = 0$, то $i = \frac{1}{4\pi\bar{\varepsilon}}$, поэтому при $\bar{\varepsilon} = 0,001$ имеем $i \approx 80$, при $\bar{\varepsilon} = 0,01 - i \approx 8$, а при $\bar{\varepsilon} = 0,1 - i < 1$. Случаи, когда $i < 1$, сравнительно редко имеют место на практике.

Следовательно, считая $\bar{\varepsilon} \leq 0,01$, охватим большинство значений скорости прохода через резонанс. В этом случае погрешность расчета не выше 4%. Если собственная частота имеет, например, величину $\omega_0 = 50 \text{ сек}^{-1}$, то допустимая скорость прохода через резонанс при $\bar{\varepsilon} = 0,01$ должна удовлетворять условию $\varepsilon = \bar{\varepsilon}\omega_0^2 \leq 25 \text{ сек}^{-2}$.

При этом время разгона до резонанса из выражения (2)

$$t \leq t_{\text{рез}}^0 - \frac{v_{\text{рез}} - \eta_0}{\varepsilon} \leq \frac{v_{\text{рез}}}{\varepsilon} - \frac{\omega_0}{\varepsilon} \approx \frac{50}{25} = 2 \text{ сек},$$

где $t_{\text{рез}}^0$ — время разгона до резонанса, если проход происходит с нулевым значением динамической частоты $\gamma_0 = \eta_0 = 0$.

Переходя в φ_2 к независимой переменной t , можно записать общее решение уравнения (3) в виде (14)

$$\varphi = ae^{-nt} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - n^2}t - \beta\right) + \frac{m_h \sin(z - \gamma)}{\sqrt{(\omega_0^2 - v^2)^2 + (\varepsilon + 2nv)^2}} \quad (14)$$

Общий вид функции $\varphi = \varphi(t)$ позволяет сделать следующие выводы.

1. Даже при отсутствии сопротивления ($n \rightarrow 0$) в условиях прохода через резонанс амплитуды колебаний будут ограниченными.

2. Наличие ε в знаменателе выражения для амплитуды углового перемещения показывает, что с увеличением ε амплитуда уменьшается.

3. Если для стационарного резонанса величина члена, содержащего e^{-nt} , со временем стремится к нулю и сохраняется составляющая движения, имеющая только частоту крутящего периодического момента, то в нашем случае, как правило, имеют значение и слагаемые с множителем e^{-nt} . Это особенно четко проявляется в явлении «биения», которое имеет место, когда динамическая частота v становится близкой к собственной частоте ω_0 . Используем обычным образом начальные условия: $t_0 = 0; \varphi_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$.

В результате имеем:

$$a = \Phi(v_0) \sin \gamma_0 \sqrt{1 + \frac{(n + \eta_0 \text{ctg} \gamma_0)^2}{\omega_0^2 - n^2}};$$

$$\Phi(v_0) = \frac{m_h}{\sqrt{(\omega_0^2 - \eta_0^2)^2 + (\varepsilon + 2n\eta_0)^2}}; \quad (15)$$

$$\text{ctg} \beta = \frac{n - \eta_0 \text{ctg} \gamma_0}{\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}; \gamma_0 = \text{arctg} \frac{\varepsilon + 2nv_0}{\omega_0^2 - v_0^2}.$$

Запишем закон сложных колебаний в безразмерных параметрах:

$$\varphi = ae^{-\bar{n}\bar{t}} \sin(\bar{\omega}_0 \bar{t} + \beta) + \Phi(\bar{v}) \sin\left(\bar{\omega}_0 \bar{t} + \frac{\bar{\varepsilon} \bar{t}^2}{2} - \gamma\right). \quad (16)$$

Рассмотрим для простоты случай, когда $\eta_0 = \bar{k}_1$. Преобразуем выражение

$$\sin\left(\bar{k}_1 \bar{t} + \frac{\bar{\varepsilon} \bar{t}^2}{2} - \gamma\right) = \sin(\bar{k}_1 \bar{t} + \beta) \cos\left(\beta + \gamma - \frac{\bar{\varepsilon} \bar{t}^2}{2}\right) - \cos(\bar{k}_1 \bar{t} + \beta) \sin\left(\eta_0 \bar{t} + \frac{\bar{\varepsilon} \bar{t}^2}{2} - \gamma\right).$$

Подставив это выражение в (16), получаем:

$$\varphi = \left[ae^{-\bar{n}\bar{t}} + \Phi(\bar{v}) \cos\left(\beta + \gamma - \frac{\bar{\varepsilon} \bar{t}^2}{2}\right) \right] \sin(\bar{k}_1 \bar{t} + \beta) - \Phi(\bar{v}) \sin\left(\beta + \gamma - \frac{\bar{\varepsilon} \bar{t}^2}{2}\right) \cos(\bar{k}_1 \bar{t} + \beta)$$

Так как $\bar{v} = \bar{k}_1 + \bar{\varepsilon}t$, то вблизи \bar{k}_1 значения $\bar{\varepsilon} \bar{t}$ будут малыми, а следовательно, период $\bar{t} = \frac{2\pi}{v_1}$, где $v_1 = \frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{\bar{\varepsilon} \bar{t}^2}{2} \right) = \bar{\varepsilon} \bar{t}$, будет значи-

тельно больше периода $\bar{T}_1 = \frac{2\pi}{\bar{\omega}_1}$. Это позволяет выразить огибающую колебаний в виде

$$F^2(\bar{t}) = \left[a e^{-\bar{\pi}\bar{t}} + \Phi(\bar{v}) \cos\left(\beta + \gamma - \frac{\bar{\varepsilon}\bar{t}^2}{2}\right) \right]^2 + \Phi^2(\bar{v}) \sin^2\left(\beta + \gamma - \frac{\bar{\varepsilon}\bar{t}^2}{2}\right) = (a e^{-\bar{\pi}\bar{t}})^2 + \Phi^2(\bar{v}) + 2a e^{-\bar{\pi}\bar{t}} \Phi(\bar{v}) \cos\left(\beta + \gamma - \frac{\bar{\varepsilon}\bar{t}^2}{2}\right). \quad (17)$$

Последняя составляющая представляет «биения» с убывающей амплитудой и возрастающей частотой $\bar{\nu}_1$. Наибольшее значение $F(\bar{t})$ определяет резонансную динамическую частоту $\gamma = \bar{\omega}_1 \mid \varepsilon \bar{t}$.

Указанные особенности прохода через резонанс имеют место и в общем случае, при любом значении начальной динамической частоты η_0 .

Данное приближенное решение задачи о равномерном проходе через резонанс достаточно удобно для расчета и позволяет легко распространить его на случай многомассовых систем.

Решение задачи о проходе через резонанс наиболее целесообразно выполнять численным методом.

Приведенное выше приближенное решение задачи получается близким по форме к решению для стационарных колебаний, которые хорошо изучены. Оно позволяет объяснить все эффекты, связанные с проходом через резонанс, и дать им численную оценку. В случае точного решения, выражающегося через специальные функции, задаваемые таблицами, вопрос о величинах резонансной динамической частоты и наибольших амплитудах решается путем анализа графиков колебаний и построения на их основе эмпирических формул.

Прямой численный расчет дифференциальных уравнений считается малоприменимым, так как имеется многократный колебательный процесс. Численный метод решения на узком временном интервале вблизи стационарного резонанса имеет удовлетворительное значение погрешности.

Дифференциальное уравнение (3) представлено в безразмерных величинах

$$\ddot{\bar{\varphi}} + 2\bar{\pi}\dot{\bar{\varphi}} + \bar{\varphi} = \bar{m}_n \sin\left(\bar{\eta}_0 \bar{t} + \frac{\bar{\varepsilon}\bar{t}^2}{2}\right).$$

Численное решение выполнено по методу Коши-Эйлера.

В расчетах варьировали величинами $\bar{\eta}_0$ ($\bar{\eta}_0 = 0,8\omega_0$ и $\bar{\eta}_0 = 0,9\omega_0$), $\bar{\varepsilon}$ (от 0,001 до 0,1), $\bar{\pi}$ (от $2\bar{\pi} = 0$ до $2\bar{\pi} = 0,1$).

На рисунке 2 даны в качестве примера графики огибающих колебаний (максимальные отклонения) при нулевых начальных условиях ($t_0 = 0, \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = 0$).

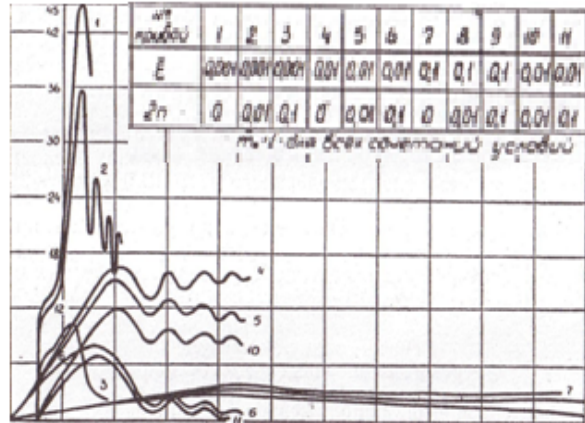


Рисунок 2 — Графики максимальных угловых отклонений (огибающих колебаний) при равномерном проходе через резонанс

Характер этих графиков и величины угловых отклонений удовлетворительно совпадают с результатами расчета по приближенному методу, изложенному выше.

Анализ расчетных данных дает возможность сделать следующие выводы.

1. Численные значения динамических резонансных частот, полученные расчетом по двум изложенным выше методам, удовлетворительно совпадают со значениями частот, определенными по эмпирической формуле (1).

$$\nu_{\text{рез}} = 1 + \frac{2,1708\sqrt{\bar{\varepsilon}}}{(\sqrt{\bar{\varepsilon}} + 0,28\bar{\pi})^2}$$

2. Величины динамических резонансных частот не зависят от начальных значений динамических частот. Поэтому их можно определять, пользуясь достаточно узким временным интервалом около положения стационарного резонанса. Этот вывод справедлив для частот биений, имеющих место при проходе через резонанс.

3. При возрастании динамической частоты с постоянной скоростью ε происходит смещение резонансной частоты в сторону увеличения.

4. При одинаковом начальном значении динамической частоты η_0 резонансный пик

(резонансная амплитуда) будет тем ниже, чем больше скорость прохода через резонанс.

5. Чем больше η_0 ($\eta_0 < \omega_0$) при одинаковом ε , тем меньше пик амплитуд. Иначе говоря, чем ближе значение η_0 к ω_0 , тем меньше успевает развиваться резонанс.

6. Величина динамических резонансных амплитуд прямо пропорциональна амплитуде возбуждающего момента при всех сочетаниях условий прохода через резонанс.

7. Чем меньше величина ε , тем более четко выражены биения в зарезонансной области.

8. В дорезонансной области биения проявляются очень слабо.

В заключение следует отметить, что численный метод решения может оказаться наиболее простым, если не единственно возможным, при рассмотрении прохода через резонанс системы, имеющей нелинейные характеристики.

Равномерный проход через резонанс многомассовой системы рассмотрим на примере четырехмассовой крутильной системы с возбуждением на первой массе. Движение данной системы описывается системой таких дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + k_1(\varphi_2 - \varphi_1) + c_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) &= M_0 \sin\left(\eta_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}\right); \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 + k_1(\varphi_2 - \varphi_1) + k_2(\varphi_2 - \varphi_3) + &+ c_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + c_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) = 0; \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 + k_2(\varphi_3 - \varphi_2) + k_3(\varphi_3 - \varphi_4) + &+ c_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3) + c_3(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4) = 0; \\ I_4 \ddot{\varphi}_4 + k_3(\varphi_4 - \varphi_3) + c_3(\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Обозначая матрицы инерции, сопротивления и жесткости соответственно через

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_4 \end{bmatrix};$$

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix};$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix},$$

и введя матрицы

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}; \dot{\varphi} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\varphi}_3 \\ \dot{\varphi}_4 \end{bmatrix}; \ddot{\varphi} = \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \\ \ddot{\varphi}_4 \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} M_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

запишем систему уравнений (18) в матричной форме:

$$I\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + c\varphi = S \sin\left(\eta_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}\right). \quad (19)$$

Введем, как и ранее, новую независимую переменную

$$z = \eta_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Теперь с учетом выражения (7) уравнение (19) примет вид

$$v^2 I \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + (\varepsilon I + vk) \frac{d\varphi}{dz} + c\varphi = S \sin z. \quad (20)$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (20), совпадает с аналогичным решением для уравнения (19), если в последнем перейти от переменной t к переменной z .

Ищем общее решение однородного уравнения (19) в виде

$$\varphi = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda z} = A e^{\lambda z}$$

где A — матрица постоянных интегрирования.

Подставим $\varphi = A \lambda e^{\lambda z}$, $\dot{\varphi} = A \lambda^2 e^{\lambda z}$ в уравнение $I\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + c\varphi = 0$. Имеем:

$$(I\lambda^2 + k\lambda + c)A e^{\lambda z} = 0. \quad (21)$$

Это однородное уравнение имеет решение, когда определитель, составленный из коэффициентов при A , равен нулю, т. е.

$$\det |I\lambda^2 + k\lambda + c| = 0.$$

В развернутом виде уравнение частот примет вид

$$\begin{vmatrix} I_1 \lambda^2 + & & & \\ +k_1 \lambda + c_1 & -k_1 \lambda - c_1 & 0 & 0 \\ & I_2 \lambda^2 + & & \\ -k_1 \lambda - c_1 & +(k_1 + k_2) \lambda + & -k_2 \lambda - c_2 & 0 \\ & +(c_1 + c_2) & & \\ 0 & -k_2 \lambda - c_2 & I_3 \lambda^2 + & -k_3 \lambda - c_3 \\ & & +(k_2 + k_3) \lambda + & \\ 0 & 0 & +(c_2 + c_3) & I_4 \lambda^2 + \\ & & -k_3 \lambda - c_3 & +k_3 \lambda + c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Известно, что корни этого уравнения будут комплексными и попарно сопряженными с отрицательными действительными частями.

Общее решение уравнения (19) можем теперь записать в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^6 A^{(i)} e^{\lambda_i t} + |C|t + |D|. \quad (22)$$

Здесь C и D — постоянные интегрирования, обязанные вращению системы как твердого тела:

$$C = \begin{bmatrix} C \\ C \\ C \\ C \\ C \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D \\ D \\ D \\ D \\ D \end{bmatrix},$$

а постоянные интегрирования $A_1^i, A_2^i, A_3^i, A_4^i$ в матрицах

$$A^i = \begin{bmatrix} A_1^i \\ A_2^i \\ A_3^i \\ A_4^i \end{bmatrix}$$

не являются независимыми. Эту зависимость определяем из системы матричных уравнений

$$(I\lambda_{(i)}^2 + k\lambda_{(i)} + c)A^i = 0.$$

Здесь $l = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; следовательно, имеем 6 матричных уравнений или 6 обычных систем по четыре уравнения в каждой.

Как следует из теории линейных колебаний,

$$\frac{A_1^i}{\Delta_{1k}(\lambda_i)} = \frac{A_2^i}{\Delta_{2k}(\lambda_i)} = \frac{A_3^i}{\Delta_{3k}(\lambda_i)} = \frac{A_4^i}{\Delta_{4k}(\lambda_i)} = d_{(i)},$$

где $\Delta_{jk}(\lambda_i)$ — минор определителя $\det |I\lambda_{(i)}^2 + k\lambda_{(i)} + c| = 0$, полученный вычеркиванием j -го столбца и k -й строки и умноженный на $(-1)^{j+k}$, ($j = 1, 2, 3, 4$; k — любое из значений, равных 1, 2, 3, 4).

Тогда общее решение однородного уравнения (19) будет:

$$\varphi = \sum_{i=1}^6 \alpha_{(i)} |\Delta_{jk}(\lambda_i)| e^{\lambda_i t} + |C|t + |D|,$$

где

$$\Delta_{jk}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \Delta_{1k}(\lambda_i) \\ \Delta_{2k}(\lambda_i) \\ \Delta_{3k}(\lambda_i) \\ \Delta_{4k}(\lambda_i) \end{bmatrix},$$

k — фиксированный индекс.

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, C$ и D — произвольные постоянные, определяемые с помощью начальных условий.

Приведем другой способ, по которому A_2^i, A_3^i, A_4^i можно выразить через A_1^i .

Уравнение (21) может быть представлено в развернутом виде:

$$\left. \begin{aligned} [I_1\lambda_{(i)}^2 + (k_1\lambda_{(i)} + c_1)]A_1^i - (k_1\lambda_{(i)} + c_1)A_2^i &= 0; \\ -(k_1\lambda_{(i)} + c_1)A_1^i + [I_2\lambda_{(i)}^2 + \\ + (k_2\lambda_{(i)} + c_2) + (k_2\lambda_{(i)} + c_2)]A_2^i - \\ - (k_2\lambda_{(i)} + c_2)A_3^i &= 0; \\ -(k_2\lambda_{(i)} + c_2)A_2^i + [I_3\lambda_{(i)}^2 + \\ + (k_3\lambda_{(i)} + c_3) + (k_3\lambda_{(i)} + c_3)]A_3^i - \\ - (k_3\lambda_{(i)} + c_3)A_4^i &= 0; \\ -(k_3\lambda_{(i)} + c_3)A_3^i + [I_4\lambda_{(i)}^2 + (k_3\lambda_{(i)} + c_3)]A_4^i &= 0. \end{aligned} \right\} (23)$$

Обозначим $(k_j\lambda_{(i)} + c_j) = \psi_j^{(i)}$, $j = 1, 2, 3$; $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ и найдем выражения для A_2^i, A_3^i, A_4^i через A_1^i справедливые для каждого корня $\lambda_{(i)}$:

$$\left. \begin{aligned} A_2^i &= A_1^i \frac{I_1\lambda_{(i)}^2 + \psi_1^{(i)}}{\psi_1^{(i)}}; \\ A_3^i &= -A_1^i \frac{\psi_1^{(i)}}{\psi_2^{(i)}} + A_2^i \frac{I_2\lambda_{(i)}^2 + \psi_1^{(i)} + \psi_2^{(i)}}{\psi_2^{(i)}}; \\ A_4^i &= A_3^i \frac{\psi_3^{(i)}}{I_4\lambda_{(i)}^2 + \psi_3^{(i)}}. \end{aligned} \right\} (24)$$

Таким образом, остается 8 постоянных $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, A_1^{(3)}, A_1^{(4)}, A_1^{(5)}, A_1^{(6)}, C$ и D , определяемых с помощью начальных условий.

Начальные условия:

$$t = 0, \varphi^0 = \begin{bmatrix} \varphi_1^0 \\ \varphi_2^0 \\ \varphi_3^0 \\ \varphi_4^0 \end{bmatrix}, \dot{\varphi}^0 = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1^0 \\ \dot{\varphi}_2^0 \\ \dot{\varphi}_3^0 \\ \dot{\varphi}_4^0 \end{bmatrix}.$$

Частное решение матричного уравнения (19) не выражается в конечном виде через элементарные функции. Найдем его приближенно, используя преобразованное уравнение в форме (20), как это делали для одно-массовой системы.

Предполагая величину $-\frac{g}{v^2}$ достаточно малой, можно считать при определении частного решения уравнения (20) коэффициенты как бы постоянными:

$$\bar{\varphi} = M \sin z + N \cos z,$$

$$\text{где } M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} \text{ и } N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \text{ есть постоянные,}$$

а точнее — медленно меняющиеся матрицы.

Подставляя производные

$$\frac{d\bar{\varphi}}{dz} = M \cos z - N \sin z \text{ и } \frac{d^2\bar{\varphi}}{dz^2} = -M \sin z - N \cos z$$

в уравнение (22), получим:

$$\begin{aligned} -v^2 I(M \sin z + N \cos z) + \\ + (\epsilon I + vk)(M \cos z - N \sin z) + \\ + c(M \sin z + N \cos z) = S \sin z. \end{aligned}$$

Приравнивая здесь коэффициенты при $\sin(z)$ и $\cos(z)$ отдельно, приходим к выражениям

$$\begin{cases} (c - v^2 I)M - (\varepsilon I + \nu n)N = S \\ (\varepsilon I + \nu n)M + (c - v^2 I)N = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Введем новые матрицы K_1, Φ_1, S_1 , применяя матрицы $M, N, S, |c - v^2 I|, |\varepsilon I + \nu k|$ как элементы:

$$k = \frac{M}{N} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_1 = \begin{vmatrix} c - v^2 I & -(\varepsilon I + \nu n) \\ \varepsilon I + \nu n & c - v^2 I \end{vmatrix}, S_1 = \begin{vmatrix} S \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$|c - v^2 I| = \begin{vmatrix} c_1 - v^2 I_1 & -c_1 & 0 & 0 \\ -c_1 & (c_1 + c_2) - v^2 I_2 & -c_2 & 0 \\ 0 & -c_2 & (c_2 + c_3) - v^2 I_3 & -c_3 \\ 0 & 0 & -c_3 & c_3 - v^2 I_4 \end{vmatrix}$$

где

$$|\varepsilon I + \nu n| = \begin{vmatrix} \varepsilon I_1 + \nu k_1 & -\nu k_1 & 0 & 0 \\ -\nu k_1 & \nu(k_1 + k_2) + \varepsilon I_2 & -\nu k_2 & 0 \\ 0 & -\nu k_2 & \nu(k_2 + k_3) + \varepsilon I_3 & -\nu k_3 \\ 0 & 0 & -\nu k_3 & \nu k_3 + \varepsilon I_4 \end{vmatrix}$$

Тогда матричную систему (25) можно записать как

$$\Phi_1 K_1 = S_1.$$

Умножая обе части на обратную матрицу Φ^{-1} , получаем

$$K_1 = \Phi_1^{-1} S_1.$$

Вводя как элементы матриц E_1 и E_2 единичную матрицу

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и нулевую,

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Запишем:

$$M = |E; 0| \cdot \begin{vmatrix} M \\ N \end{vmatrix} = E_1 k_1;$$

$$N = |0; E| \cdot \begin{vmatrix} M \\ N \end{vmatrix} = E_2 k_1.$$

Тогда частное решение уравнения (20) можно записать в виде

$$\bar{\varphi} = M \sin z + N \cos z = E_1 k_1 \sin z + E_2 k_1 \cos z = E_1 \Phi_1^{-1} S_1 \sin z + E_2 \Phi_1^{-1} S_1 \cos z = (E_1 \sin z + E_2 \cos z) \Phi_1^{-1} S_1.$$

Здесь обратная матрица Φ_1^{-1} зависит от $v = \eta_0 + \varepsilon t$; следовательно, амплитуды вынужденных колебаний будут меняться со временем.

Возвращаясь в $\bar{\varphi}$ к независимой переменной t , получим частное решение исходного уравнения (19).

Складывая частное решение и общее решение однородного уравнения для (19), получим приближенное решение в матричной форме.

$$\begin{aligned} \varphi &= \\ &= \left[E_1 \sin \left(\eta_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \right) + E_2 \cos \left(\eta_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \right) \right] \Phi_{1(v)}^{-1} S_1 + \\ &+ \sum_{i=1}^6 \alpha_{(i)} |\Delta_{jk}(\lambda_i)| e^{\lambda_i t} + |C|t + |D|. \end{aligned} \quad (26)$$

Как и для одномассовой системы, следует ограничиваться теми случаями, когда скорость прохода через резонанс достаточно мала, а сопротивление относительно велико.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попович В.С. Экспериментальные методы исследования напряженного и деформированного состояния деталей машин: учебное пособие. – 2-е изд. перераб. и доп. /В.С. Попович; Алт. гос. техн. ун-т им. И.И. Ползунова. – Барнаул: изд. АлтГТУ, 2009. – 108 с.

Попович В.С., д.т.н., проф.,
профессор кафедры «Прикладная механика»,
e-mail: vspopovich@yandex.ru
тел. (83852) 367608.

Жердев А.А., аспирант кафедры
«Прикладная механика»,
e-mail: zherdev.Andrej.86@mail.ru
тел. (83852) 367608.

Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Барнаул