

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ МАШИН С ДВИГАТЕЛЯМИ ПРИ УЧЕТЕ ЗАЗОРОВ

В.С. Попович, Р.Е. Пестрецов

Реальные крутильные системы силовых передач машин имеют зазоры в соединениях трансмиссий. Наличие зазоров приводит к заметному изменению характера динамических явлений в элементах. Система с зазорами нелинейна, теоретический анализ ее колебаний при этом значительно усложняется по сравнению с беззазорной системой. Внерезонансные и резонансные вынужденные колебания приводят к изменениям закономерности и возможности оценить влияние величин зазоров в системах. В статье рассматриваются теоретические вопросы свободных и вынужденных крутильных колебаний при наличии зазоров в системах машин.

Ключевые слова: крутильные колебания, резонансные колебания, зазоры.

Рассмотрим свободные крутильные колебания приведенной трехмассовой системы с двумя зазорами $\Delta 1$ и $\Delta 2$ (Рисунок 1). Моменты инерции и жесткости этой системы могут быть определены по известным методам. Массы I_1, I_2, I_3, I_4 соответствует тем элементам действительного валопровода, которые содержат зазоры. Моменты инерции I_1, I_2, I_3 соответствуют массам элементов системы с беззазорными соединениями и при выборе зазоров не соударяются.

В данной системе свободные крутильные колебания соответствуют случаю, когда зазоры не выбраны, и, следовательно, справедливы условия

$$|\varphi_1 - \psi_2| < \Delta 1 \text{ и } |\varphi_3 - \psi_4| < \Delta 2.$$

Система разделена зазорами на три независимые части и представлена следующими уравнениями:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1'(\varphi_1 - \psi_1) = 0; \\ I_1' \ddot{\psi}_1 - c_1'(\varphi_1 - \psi_1) = 0; \\ I_2 \ddot{\psi}_2 + c_1''(\psi_2 - \varphi_1) = 0; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - c_1''(\psi_2 - \varphi_2) + c_2'(\varphi_2 - \psi_3) = 0; \\ I_3 \ddot{\psi}_3 - c_2'(\varphi_2 - \psi_3) = 0; \\ I_4 \ddot{\psi}_4 + c_2''(\psi_4 - \varphi_3) = 0; \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 - c_2''(\psi_4 - \varphi_3) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ - угловые перемещения масс с моментами инерции I_1, I_2, I_3, I_4 ; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ - угловые перемещения масс I_1, I_2, I_3 .

В момент времени, когда выполняется одно из условий - $|\varphi_1 - \psi_2| = \Delta 1$ или $|\varphi_3 - \psi_4| = \Delta 2$, происходит соударение сопряженных с соответствующим зазором масс.

В силовых передачах машин зазоры имеют место в зубчатых зацеплениях различных шестеренчатых редукторов (реверсы, усилители крутящих моментов, коробки пере-

дач и прочее). Эти шестерни при нормальных условиях эксплуатации работают в масляной ванне. Естественно допустить, что характер удара при соударении будет неупругим. Тогда после соударения массы I_1 и I_2 или I_2 и I_4 будут двигаться как одно жесткое целое. Кинематика движения масс I_1, I_2, I_3 во время удара не изменяется.

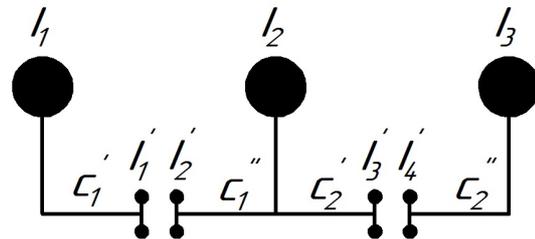


Рисунок 1 – Исходная схема упрощенной трехмассовой системы с зазорами

Движение масс I_1 и I_2 после соударения представляется уравнением

$$I' \ddot{\psi}_1 - c_1'(\varphi_1 - \psi_1) + c_1''(\psi_1 - \varphi_2 - \Delta 1) = 0, \quad (2)$$

где $I = I_1 + I_2$; $\psi_2 + \Delta 1 = \psi_1$.

Допустим, что момент инерции $I = I_1 + I_2$ мал по сравнению с I_1, I_2, I_3 . При прочих равных условиях можно допустить, что момент касательных сил инерции массы I также сравнительно мал. Первым слагаемым в уравнении (2) можно пренебречь, и, путем преобразований, из (2) имеем

$$\psi_1 = \frac{c_1' \varphi_1 + c_1'' (\varphi_2 + \Delta 1)}{c_1' + c_1''} \quad (3)$$

Рассуждая аналогично для случая неупругого соударения сравнительно малых масс I_2 и I_4 , можно получить выражение для ψ_3 , подобное (3).

Подставляя выражения для ψ_1 и ψ_3 в первое, четвертое и седьмое уравнения системы (1), получим

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta 1) = 0; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - c_1(\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta 1) + c_2(\varphi_2 - \varphi_3 - \Delta 2) = 0; \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 - c_2(\varphi_2 - \varphi_3 - \Delta 2) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Систему уравнений (4) можно считать справедливой для всех этапов движения системы (Рисунок 2) при указанных выше условиях.

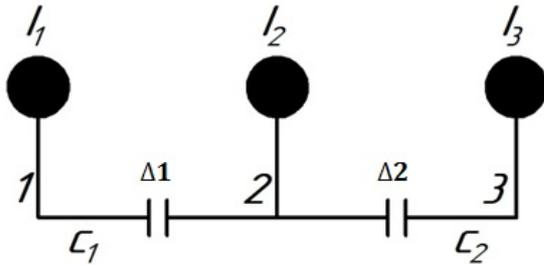


Рисунок 2 – Расчетная схема упрощенной системы

При составлении и решении этой системы уравнений необходимо учитывать следующие правила.

Величины зазоров входят в уравнения как алгебраические. Если $\varphi_1 - \varphi_2 > 0$, то $\Delta 1 > 0$; если $\varphi_2 - \varphi_3 > 0$, то $\Delta 2 > 0$. В противном случае зазорам приписывается знак минус.

В моменты времени, когда зазоры замыкаются или размыкаются, выполняются условия перехода:

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = \Delta 1; \quad |\varphi_2 - \varphi_3| = \Delta 2. \quad (5)$$

В уравнениях (4) в случае замыкания зазора нужно положить жесткость соответствующего участка равной нулю.

Практическое решение системы (4) следует выполнять следующим образом.

Будем характеризовать три случая наличия зазоров: сочетание присутствия или отсутствия зазора. Комбинация зазоров системы представляется совокупностью четырех случаев для системы, приведенной на рисунке 2.

Теперь из (4) с учетом этих комбинации зазоров получаем четыре системы дифференциальных уравнений, каждая из которых будет иметь свою систему решений.

Для комбинации при наличии зазора решения имеют вид:

$$\begin{cases} \varphi_1 = A \sin(\omega_1 t + \alpha) + B \sin(\omega_2 t + \beta) + Mt + N + \Delta 1; \\ \varphi_2 = A \frac{c_1 - \omega_1^2 I_1}{c_1} \sin(\omega_1 t + \alpha) + B \frac{c_1 - \omega_2^2 I_1}{c_1} \sin(\omega_2 t + \beta) + Mt + N; \end{cases}$$

$$\varphi_3 = A \frac{c_2 - \omega_1^2 I_2}{c_1} \frac{c_2}{c_2 - \omega_1^2 I_2} \sin(\omega_1 t + \alpha) + B \frac{c_2 - \omega_2^2 I_2}{c_2} \frac{c_2}{c_2 - \omega_2^2 I_2} \sin(\omega_2 t + \beta) + Mt + N,$$

где ω_1 и ω_2 - угловые частоты свободных колебаний трехмассовой беззазорной системы; A, B, M, N, α и β - постоянные интегрирования.

Для других последующих комбинаций имеем:

$$\begin{cases} \varphi_1 = A_1 \sin(\omega' t + \alpha_1) + M_1 t + N_1 + \Delta 1; \\ \varphi_2 = A_1 \frac{c_1 - \omega'^2 I_1}{c_1} \sin(\omega' t + \alpha_1) + M_1 t + N; \\ \varphi_3 = M_1' t + N_1'; \\ \varphi_1 = M_2' t + N_2'; \\ \varphi_2 = A_2 \sin(\omega'' t + \alpha_2) + 2t + N_2; \\ \varphi_3 = A_2 \frac{c_2 - \omega''^2 I_2}{c_1} \sin(\omega'' t + \alpha_2) + M_2 t + n_2 - \Delta 2; \\ \varphi_1 = M_3'' t + N_3''; \\ \varphi_2 = M_3' t + N_3'; \\ \varphi_3 = M_3 t + N_3, \end{cases} \quad (7)-(9)$$

где ω' - угловая частота свободных колебаний двухмассовой беззазорной системы (I_1, I_2, c_2); ω'' - частота беззазорной системы (I_2, I_3, c_2); A_1, M_1, N_1 и т.д. - постоянные интегрирования.

Постоянные интегрирования для всех случаев определяются из начальных условий. Конечные значения углов поворота $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и угловых скоростей $\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{\varphi}_3$ для данного этапа движения принимаются в качестве начальных для следующего этапа движения.

Все необходимые вычисления могут быть выполнены на ЭВМ, программирование задачи не вызывает принципиальных затруднений.

Вычисления производятся по уравнениям (6), (7), (8) и (9) в зависимости от комбинации зазоров. В программе должна быть предусмотрена непрерывная оценка состояния зазоров на основании (5).

Изложенный метод применим для систем с большим числом масс. Предельное число масс ограничивается только техническими трудностями расчета.

Ниже приводятся результаты расчета упрощенной крутильной системы силовой передачи трактора Т-4 АТЗ на пятой передаче. Параметры системы равны: $I_1=21,653$ кгмсек²; $I_2=2,640$ кгмсек²; $I_3=9,363$ кгмсек²; $c_1=20800$ кгсм; $c_2=23400$ кгсм; $\Delta 1=\Delta 2=0,5$. Начальные условия: $\varphi_{10}=2,060$; $\varphi_{20}=1,000$; $\varphi_{30}=-4,357$; $\dot{\varphi}_{10}=\dot{\varphi}_{20}=\dot{\varphi}_{30}=0$ (считаем, что в начальный момент времени система закручена по первой форме свободных крутильных коле-

баний – одноузловые колебания). Масса I_1 объединяет массы двигающихся деталей двигателя, маховика, муфты сцепления и части кардана; масса I_2 - приведенную массу трактора, ведущего колеса и гусеничных обводов; масса I_3 - остальные массы силовой передачи трактора. Можно считать, что все элементы с зазором объединены в массу №2. Величина момента инерции этой массы составляет ~8% от массового момента инерции всей системы. В качестве первого приближения можно допустить, что в данном случае величины непосредственно соударяющихся масс сравнительно невелики.

На рисунке 3 приведены графики зависимости угловых перемещений масс системы от времени. В момент времени $t=0,0278$ сек полностью выбираются оба зазора, при $t=0,0315$ сек замыкаются массы I_2 и I_3 . Затем массы I_2 и I_3 остаются замкнутыми. Непродолжительное размыкание этих масс имеет место в промежутке времени от $t=0,0823$ сек до $t=0,0855$ сек. Массы I_1 и I_2 несколько раз замыкаются и размыкаются.

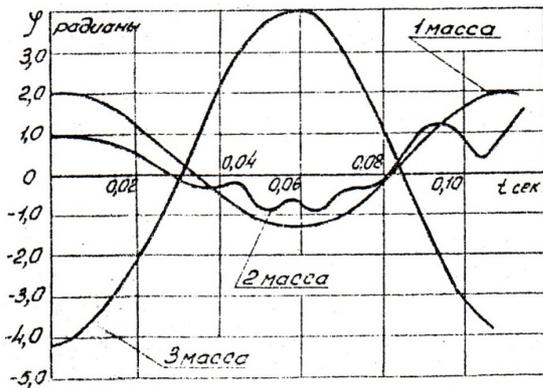


Рисунок 3 – График угловых перемещений масс системы в функции от времени

Перемещение третьей массы практически синусоидальное. За период колебания беззазорной системы ($t \approx 0,11$ сек) период колебаний и характер движения больших масс практически не изменился. Движение средней, меньшей по величине массы значительно искажается: не сохраняется синусоидальный характер движения, увеличивается неравномерность вращения, нарушается периодичность движения.

Вынужденные колебания крутильной системы с безынерционным упругим валом (рисунок 4) определяются на основании дифференциальных уравнений движения в общем виде:

$$I\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + c(\varphi - \Delta) = M_{\text{сп}} = \bar{M}_0 + \bar{M} \sin(\eta t + p - p \cos \lambda t), \quad (10)$$

где I – момент инерции массы; φ – мгновенный угол поворота; k – коэффициент скоростного сопротивления; c – жесткость вала; Δ – угловой зазор; $M_{\text{сп}}$ – возбуждающий крутящий момент; \bar{M}_0 – постоянная составляющая крутящего момента; \bar{M} – амплитуда переменной составляющей момента; η – основная частота изменения момента; p – амплитуда вариации основной частоты; λ – частота вариации основной частоты.

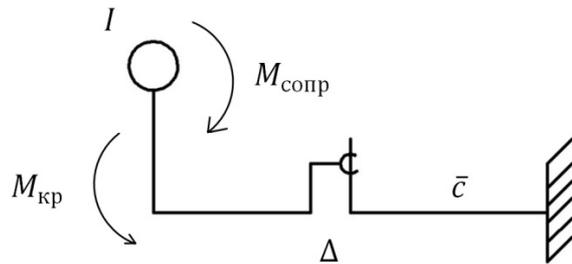


Рисунок 4 – Расчетная схема одномассовой крутильной системы с зазором.

Введем понятие динамической частоты изменения возмущающего момента:

$$\gamma = \frac{d}{dt} (\eta t + p - p \cos \lambda t) = \eta + p\lambda \sin \lambda t. \quad (11)$$

При $t_0 = 0$ переменная часть момента и динамической частоты равна нулю независимо от значений других параметров. При возрастании времени t частота момента периодически изменяется с амплитудой $p\lambda$ и частотой λ .

Преобразовав уравнение (9), разделив на I и вводя новые обозначения, получаем:

$$\ddot{\varphi} + n\dot{\varphi} + c(\varphi - \Delta) = M_0 + M \sin(\eta t + p - p \cos \lambda t). \quad (12)$$

$$n = \frac{k}{I}; \quad c = \frac{c}{I}; \quad M_0 = \frac{\bar{M}_0}{I}; \quad M = \frac{\bar{M}}{I}.$$

Если зазор в системе выбран или вообще отсутствует, собственная угловая частота равна $\omega_c = \sqrt{c/I}$.

Принимаем $\omega_c = 1$, что можно достичь переходом к безразмерному времени. Считаем $c = 1$, когда зазор выбран и $c = 0$, когда зазор свободен (не выбран). Для упрощения будем также считать, что $M = 1$. Тогда основное уравнение примет вид

$$\ddot{\varphi} = -n\dot{\varphi} - c(\varphi - \Delta) + M_0 + \sin(\eta t + p - p \cos \lambda t), \quad (13)$$

$$\varphi = f(\varphi, \dot{\varphi}, t).$$

Уравнение (12) было решено для ряда сочетаний постоянных параметров системы методом Коши-Эйлера.

Схема решения уравнений приведена в таблице 1. Были приняты следующие условия перехода:

при $|\varphi| < |\Delta|$ считать, что $c = 0$;

при $|\varphi| \geq |\Delta|$ считать, что $c = 1$;

если знак у φ «+», считать у Δ знак «-».

Шаг времени принят равным $h = 0,0001$, предусмотрена возможность его изменения.

Общие начальные условия:

$$t_0 = 0, \varphi_{i0} = 0, \dot{\varphi}_{i0} = 0.$$

Выводились на печать значения следующих величин: $\varphi_i, t_i, \gamma_i, M_i = c(\varphi_i - \Delta)$ для всех t_i , когда выполнялось условие максимума $|\varphi_{i-1}| \leq |\varphi_i| \geq |\varphi_{i+1}|$.

Расчет вели до $t = 300$. К этому моменту времени колебательный процесс в системе стабилизировался. В некоторых случаях полное время колебаний изменялось.

Сочетание исходных постоянных параметров приведено в таблице 2.

На рисунке 5 даны огибающие кривые колебаний – зависимость наибольших угловых отклонений массы от времени.

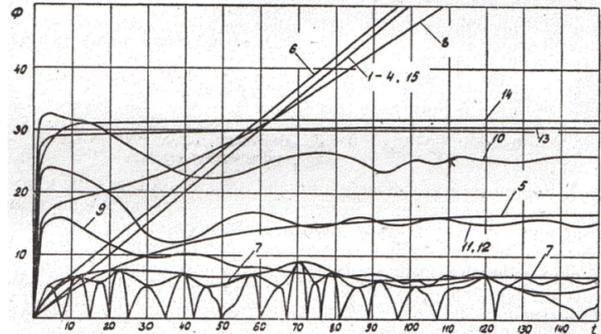


Рисунок 5 – Графики развития колебаний – зависимость наибольших угловых отклонений от времени $\Phi = f(t)$. Номера вариантов расчета соответствуют таблице 2

Таблица 1 – Схема решения уравнений

t	φ_i	$\dot{\varphi}_i$	$\varphi_i = f(\varphi_i, \dot{\varphi}_i, t)$
t_0	φ_{i0}	$\dot{\varphi}_{i0}$	$\dot{\varphi}_{i0} = f(\varphi_{i0}, \dot{\varphi}_{i0}, t_0)$
$t_0 + h$	$\varphi_{i1} = \varphi_{i0} + h \frac{\dot{\varphi}_{i0} + \dot{\varphi}_{i1}}{2}$	$\dot{\varphi}_{i1} = \dot{\varphi}_{i0} + h \ddot{\varphi}_{i0}$	$\dot{\varphi}_{i1} = f(\varphi_{i1}, \dot{\varphi}_{i1}, t_0 + h)$
$t_0 + 2h$	$\varphi_{i2} = \varphi_{i0} + h \frac{\dot{\varphi}_{i0} + \dot{\varphi}_{i2}}{2}$	$\dot{\varphi}_{i2} = \dot{\varphi}_{i0} + h \frac{\ddot{\varphi}_{i0} + \ddot{\varphi}_{i2}}{2}$	
↓	↓	↓	
t_0	φ_{i0}	$\dot{\varphi}_{i0}$	

Таблица 2 – Сочетание исходных постоянных параметров

№ вар-та	n	M_c	p	λ	$ \Delta $	Характеристика колебательного процесса
1	0	0	0	0	0	«Чистый» резонанс без сопротивлений
2	0	0	0,0333	0,3	0	Вариация частоты
3	0	0	0,01	1	0	»
4	0	0	0,01	5	0	»
5	0,06	0	0,01	5	0	Вариация частоты и сопротивления

6	0	0	0	0	1	«Чистый» резонанс в системе с зазором
7	0	0	0	0	5	»
8	0	10	0	0	5	Наличие постоянной составляющей момента
9	0,06	10	0	0	5	Наличие зазора, сопротивления и постоянной составляющей момента
10	0,06	20	0	0	5	»
11	0,06	15	0	0	5	»
12	0,06	15	0,01	5	5	»
13	0,06	15	0,01	5	1	Общий случай
14	0,06	15	0,01	5	0	»
15	0	0	0,1667	0,3	0	Система без зазора. Вариация только возмущающей частоты.

Выводы

Анализ полученных данных дает основание сделать следующие выводы.

1. Вариации частоты возмущающего момента с амплитудой до $\rho\lambda = 0,05$, т.е. до 5% от основной частоты $\eta = \omega_0 = 1$, не вызывают существенного изменения огибающей вынужденных колебаний. Графики огибающих на рисунке 2 для вариантов 1-4, 15 изображаются одной прямой.

2. Если отсутствует вариация частоты, сопротивление и постоянная составляющая момента, а зазор сравнительно мал (вариант 6), то амплитуда колебаний не ограничена. В случае, когда зазор достаточно велик (вариант 7); при одинаковых прочих условиях амплитуды колебаний резко падают – ограничены. Прибавление постоянного момента $M_c = 10$ приводит к замыканию зазора и к возрастанию амплитуды колебаний (вариант 8).

3. В системах с сопротивлением, при наличии постоянной составляющей момента и вариации частоты, влияние зазора аналогично: при малых зазорах это влияние ничтожно (варианты 1 и 6, 13 и 14); влияние возрастает с увеличением величины зазора (варианты 12 и 13).

4. Рассмотренные закономерности дают возможность оценить влияние вариации частоты и величины зазора на амплитуду вынужденных внерезонансных и резонансных колебаний. Например, появление зазора $\Delta = 5$ в

системах 1-7 сопровождается уменьшением амплитуды при $t = 100$ в 8,35 раза.

5. Изложенная методика анализа может быть применена для анализа формы колебаний и распространена на многомассовые системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кожевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. Киев, АН УССР, 1961.
2. Кожевников С.Н., Ленский А.Н. Динамическое исследование механизмов с зазорами в кинематических парах. – Сб. «Динамика машин», Машгиз, М., 1960.
3. Вейц В.Л. Исследование установившегося движения машинного агрегата с зазорами в соединениях. – Сб. «Динамика машин», М., Машиностроение, 1966.
4. Попович В.С. Анализ прочности коленчатого вала быстроходного дизеля / Диссертация канд. техн. наук. – Барнаул, 1971. – 232 с.

Попович В.С., д.т.н., проф.,
профессор кафедры «Механика и инноватика»,
e-mail: vspopovich@yandex.ru
тел.: (83852) 290960

Пестрецов Р.Е., аспирант кафедры
«Механика и инноватика»,
e-mail: pestret@mail.ru
тел.: 8-905-928-1218

Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, Барнаул