

ЛИНЕЙНАЯ КОНВЕКЦИЯ БЕНАРА - МАРАНГони ПРИ КВАДРАТИЧНОМ НАГРЕВЕ СВЕРХУ ПЛОСКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

С.Н. Аристов, С.С. Власова, Е.Ю. Просвирыков

Найдено стационарное точное решение системы Обербека-Буссинеска, описывающее конвективное термокапиллярное течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском слое при квадратичном нагреве свободной поверхности. Приведен анализ конвективных течений, зависящий от свойств квадратичной формы температуры. Показано, что распределение давления и температуры зависит от вида нагрева, тогда как для скоростей показана связь между видами нагревов.

Ключевые слова: точное решение, термокапиллярная конвекция, проблема Рауса-Гурвица, изолинии, система Обербека-Буссинеска.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование плоского движения теплопроводящей вязкой несжимаемой жидкости традиционно изучается в слое, нижняя граница которого является абсолютно жесткой поверхностью. Верхняя граница может оставаться свободной. Такой выбор геометрии канала течения объясняется относительной простотой записи граничных условий для замыкания начально-краевых задач, описываемых системой уравнений Обербека-Буссинеска. В настоящее время развит аппарат исследования неизо-термических течений вязкой несжимаемой жидкостей в случае постоянных и линейных температур на границах - в меньшей степени - и анализа устойчивости (неустойчивости) таких течений [1-8]. Разработанная методика решения задач, указанных выше, не позволяет строить решения в точках экстремумов, поскольку градиент температуры в этих точках имеет нулевые значения.

Отметим, что изучение конвективных течений, индуцированных тангенциальными силами на верхней свободной границе слоя жидкости, является актуальной задачей, поскольку в пионерских работах Бенара подчеркивалось важность термокапиллярного механизма при образовании конвективных течений, а не только силы Архимеда, как предполагали другие исследователи [9-11].

В [12] был описан конвективный теплообмен нагреваемого сверху по

квадратичному закону плоского слоя жидкости, ограниченного двумя жесткими стенками. Использовались два характерных масштаба приведения к безразмерному виду: вертикальный и горизонтальный. Это отличие от классического обезразмеривания проявляется только в граничных условиях, тогда как в уравнениях, описывающих конвективный теплообмен, использовался только один характерный масштаб. В [13] это обстоятельство было устранено, но в работах [12, 13] был рассмотрен только один вид параболического нагрева, хотя их может быть четыре. В настоящей работе этот недостаток устранен.

1. Постановка задачи. Плоское течение теплопроводящей вязкой несжимаемой жидкости описывается системой уравнений Обербека-Буссинеска [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \Delta V_x, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \Delta V_z + g\beta T, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \chi \Delta T, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь введены следующие обозначения:
 V_x, V_z – скорости, параллельные осям

абсцисс и аппликата соответственно; P – отклонение давления от гидростатического, отнесенное к постоянной средней плотности жидкости; T – отклонение от средней температуры; ν , χ , β – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения соответственно жидкости; g – ускорение свободного падения, Δ – оператор Лапласа.

Решение системы уравнений (1) будет искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_x &= \chi u, \quad V_z = w, \\ P &= P_0 + \frac{\chi^2}{2} P_{11}, \quad T = T_0 + \frac{\chi^2}{2} T_{11}. \end{aligned} \quad (2)$$

Все множители при однородных слагаемых и горизонтальных координат в выражениях (2) являются функциями, зависящими от поперечной координаты z и времени t . Отметим, что равенства (2) фактически представляют собой разложение в ряды Тейлора с различным числом удерживаемых членов для скоростей и термосиловых полей [12, 13]. Решение (2) впервые было предложено Линем для уравнений магнитной гидродинамики при постоянной температуре [14]. Современный обзор изотермических решений (2) приведен в работе [15].

Далее ограничимся рассмотрением установившихся течений. Подставим стационарное решение (2) в систему уравнений (1), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 2uT_{11} + w \frac{dT_{11}}{dz} &= \chi \frac{d^2 T_{11}}{dz^2}, \quad \frac{dP_{11}}{dz} = g\beta T_{11}, \\ u^2 + w \frac{du}{dz} &= -P_{11} + \nu \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad u + \frac{dw}{dz} = 0, \\ w \frac{dw}{dz} &= -\frac{dP_0}{dz} + g\beta T_0 + \nu \frac{d^2 w}{dz^2}, \\ w \frac{dT_0}{dz} &= \chi \left(T_{11} + \frac{d^2 T_0}{dz^2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Далее будем находить решение в точке экстремума температуры. Покажем, что в этом случае нелинейная система уравнений (3) редуцируется к линейной. Для этого приведем систему (3) к безразмерному виду. В качестве базиса выберем следующие единицы измерения: поперечный

характерный размер – h , продольный характерный размер – l , температура – Θ , поперечная скорость w – $g\beta\Theta h^4 / \nu L^2$, давление, деленное на постоянную плотность – $g\beta\Theta h$. Здесь Θ – максимальная разность температур. Система уравнений (3) в безразмерном виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Gr} \left(2uT_{11} + w \frac{dT_{11}}{dz} \right) &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{d^2 T_{11}}{dz^2}, \quad \frac{dP_{11}}{dz} = T_{11} \\ \text{Gr} \left(u^2 + w \frac{du}{dz} \right) &= -P_{11} + \frac{d^2 u}{dz^2}, \quad u + \frac{dw}{dz} = 0, \\ \text{Gr} w \frac{dw}{dz} &= -\frac{dP_0}{dz} + T_0 + \delta^2 \frac{d^2 w}{dz^2}, \\ \text{Gr} w \frac{dT_0}{dz} &= \frac{1}{\text{Pr}} \left(\delta^2 T_{11} + \frac{d^2 T_0}{dz^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В системе уравнений (4) введены следующие безразмерные комплексы:

$\text{Gr} = g\beta\Theta h^5 / \nu^2 L^2$ – число Грасгофа, записанное для двух характерных масштабов; $\text{Pr} = \nu / \chi$ – число Прандтля.

Уравнения (4) выписаны в том порядке, в котором будет осуществляться интегрирование. Используемое в (4) модифицированное число Грасгофа равняется классическому, умноженному на квадрат отношения характерных длин δ^2 . Следовательно, даже при больших классических числах Грасгофа, модифицированное число Грасгофа будет стремиться к нулю при стремлении к нулю δ . Очевидно, что экстремум функции, описывающей распределение температуры в жидкости имеет место, когда число модифицированное Грасгофа равно нулю. В этом случае течение вязкой несжимаемой жидкости будет описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_{11}}{dz^2} &= 0, \quad \frac{dP_{11}}{dz} = T_{11} \\ \frac{d^2 u}{dz^2} &= P_{11}, \quad \frac{dw}{dz} = -u, \end{aligned} \quad (5)$$

ЛИНЕЙНАЯ КОНВЕКЦИЯ БЕНАРА - МАРАНГОНИ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ НАГРЕВЕ СВЕРХУ
ПЛОСКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

$$\frac{d^2 T_0}{dz^2} = -\delta^2 T_{11}, \quad \frac{dP_0}{dz} = T_0 + \delta^2 \frac{d^2 w}{dz^2}.$$

Система уравнений (5) имеет решение:

$$\begin{aligned} T_{11} &= C_1 z + C_2, \quad P_{11} = C_1 \frac{z^2}{2!} + C_2 z + C_3, \\ u &= C_1 \frac{z^4}{4!} + C_2 \frac{z^3}{3!} + C_3 \frac{z^2}{2} + C_4 z + C_5, \\ w &= -C_1 \frac{z^5}{5!} - C_2 \frac{z^4}{4!} - C_3 \frac{z^3}{3!} - C_4 \frac{z^2}{2!} - C_5 z + C_6, \\ T_0 &= -C_1 \delta^2 \frac{z^3}{3!} - C_2 \delta^2 \frac{z^2}{2!} + C_7 z + C_8, \quad (6) \\ P_0 &= -2C_1 \delta^2 \frac{z^4}{4!} - 2C_2 \delta^2 \frac{z^3}{3!} + (C_7 - \delta^2 C_3) \frac{z^2}{2} + \\ &\quad + (C_8 - \delta^2 C_4) z + C_9. \end{aligned}$$

2. Решение краевой задачи. Для нахождения постоянных интегрирования $\square$ коэффициентов многочленов (6) $\square$ сформулируем граничные условия. Поскольку рассматривается влияние термокапиллярного эффекта на конвективное течение жидкости, то для простоты вычислений и дальнейшего анализа свободную границу будем описывать уравнением плоскости: $z = 0$; нижнюю, абсолютно твердую, $\square$ $z = -h$.

На верхней, свободной границе, задан точечный источник тепла: $T = A + Bx^2$. Температура источника является кривой второго порядка [12, 13]. Для полного анализа результатов необходимо и достаточно рассмотреть четыре вида нагрева:

$$\begin{aligned} T_I &= \frac{\Theta}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right), \quad T_{II} = \frac{\Theta}{2} \left(-1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right), \\ T_{III} &= \frac{\Theta}{2} \left(-1 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right), \quad T_{IV} = \frac{\Theta}{2} \left(1 + \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Далее запишем граничные условия для распределения температуры: T_I . Остальные случаи рассматриваются аналогично. Граничные условия для определения постоянных интегрирования безразмерных решений (6) записываются в виде:

$$\text{при } z = -1: w = \frac{dw}{dz} = 0, \quad T_0 + \frac{T_{11}}{2} = 0; \quad (7)$$

$$\text{при } z = 0: w = 0, \quad P_{11} = 0, \quad T_{11} = -1,$$

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -Mg, \quad T_0 = \frac{1}{2}, \quad P_0 = 1. \quad (8)$$

В формулах (10) $Mg = \sigma / \rho h^2 g \beta$ - число Марангони. Очевидно, что независимо от вида нагрева для постоянных интегрирования (6) в силу соотношений (9) и (10) справедливы равенства: $C_3 = C_6 = 0$, $C_9 = 1$. Постоянные C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , C_5 совпадают для I и III типов нагрева и противоположны по знаку для II и IV. Они принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} C_1 &= 15Mg - \frac{15}{4}, \quad C_2 = -1, \quad C_4 = Mg, \\ C_5 &= \frac{3}{8}Mg - \frac{1}{96}. \end{aligned}$$

Остальные постоянные интегрирования для нагревов I-IV записываются соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} C_7 &= \frac{15}{8} - \frac{15Mg}{2} + \frac{5Mg\delta^2}{2} - \frac{\delta^2}{8}, \quad C_8 = \frac{1}{2}; \\ C_7 &= \frac{\delta^2}{8} - \frac{5Mg\delta^2}{2} - \frac{15}{8} + \frac{15Mg}{2}, \quad C_8 = -\frac{1}{2}; \\ C_7 &= \frac{7}{8} - \frac{15}{2}Mg + \frac{5Mg\delta^2}{2} - \frac{\delta^2}{8}, \quad C_8 = -\frac{1}{2}; \\ C_7 &= \frac{15}{2}Mg + \frac{\delta^2}{8} - \frac{5Mg\delta^2}{2} - \frac{7}{8}, \quad C_8 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Анализ свойств течений жидкости, зависящих от вида нагрева. Решения (6) системы уравнений (5) являются полиномиальными, то анализ течений можно свести всегда к решению обобщенной проблемы Рауса-Гурвица [13]. Таким образом, пограничные значения чисел Марангони для каждого гидродинамического и термосилового поля вычисляется методами локализации корней полиномов (6) с приведенными выше постоянными.

Проанализируем полученные решения, описывающие скорости V_x и V_z . Отметим, что полученные решения справедливы и для отрицательных чисел Марангони, хотя, как известно, для большинства жидкостей данное число положительно. Подробный анализ нагрева I проведен осесимметричной конвекции Бенара - Марангони в [13]; там же указана факторизация многочленов. В данной

работе акцент сделан на исчерпывающем изучении нагрева свободной границе.

Заметим, что скорость V_z совпадает при I и III типе нагрева, а в остальных случаях противоположна. Осуществляя нагрев I или III способом, при $Mg \leq 1/36$ скорость V_z принимает только отрицательные значения, при $1/36 < Mg < 1/12$ – как положительные, так и отрицательные значения (по толщине слоя жидкость течет в противоположные стороны $\square$ возникает противотечение), а при $Mg \geq 1/12$ – положительные значения. При подогреве жидкости II или IV способом при $Mg \leq 1/36$ скорость V_z принимает только положительные значения, при $1/36 < Mg < 1/12$ – как положительные, так и отрицательные значения, а при $Mg \geq 1/12$ – отрицательные значения. Следовательно, в зависимости от величины числа Марангони, на свободной – верхней, и на твердой – нижней, границах, скорость может одновременно иметь разные знаки. На рис. 1 показана зависимость скорости V_z от числа Марангони для II или IV способа нагрева, при которых, как было показано выше, значения скорости V_z противоположны I и III типу нагревов.

Множество значений функции V_x при нагреве I или III способом при $Mg \leq 1/36$ и $Mg \geq 1/12$ – полином, определяющий знак функции V_x , имеет один корень в области определения, при $1/36 < Mg < 1/12$ – два корня. А при осуществлении нагрева II или IV способом при $Mg \leq 1/36$ и $Mg \geq 1/12$ – полином, определяющий знак функции V_x , имеет два корня в области определения, при $1/36 < Mg < 1/12$ – один корень. На рис. 2 показана зависимость скорости V_x от числа Марангони для II или IV способа нагрева, при

которых значения скорости V_x противоположны I и III нагреву.

Из граничного условия (9), связывающего T_0 и T_1 в граничном условии (7) следует, что температура от масштабного множителя δ^2 на нижней границе зависеть не будет. Приведем распределение температуры на рис. 3 для II случая нагрева. Следовательно, знак температуры зависит только от числа Марангони. При нагреве I или III способом при $Mg < 11/60$ жидкость имеет отрицательную температуру, при $Mg > 11/60$ – положительную, при $Mg = 11/60$ – температура нулевая. При нагреве II или IV способом нагрева при $Mg < 11/60$ жидкость имеет положительную температуру, при $Mg > 11/60$ – отрицательную, при $Mg = 11/60$ – температура нулевая. При других $z \in (-1, 0)$ температура всегда будет зависеть от δ^2 . Анализ проводится аналогично.

Отметим, анализируя давление P , что для I случая нагрева множество значений функции давления при одном и том же значении Марангони принимает как положительное значение, так и отрицательное, закрашенная область соответствует отрицательным значениям, не закрашенная – положительным. Для всех последующих случаев нагрева рассуждения аналогичны. Приведем рисунки 4-6 для II случая нагрева.

На рис. 7-11 представлены изолинии функции тока для II случая нагрева, приведенного давления и температуры для II и IV случаев нагревов и отражены различия между видами нагревов. Это связано с тем, что изолинии температуры и обобщенного давления для комбинации нагревов I и II, III и IV качественно совпадают. Для температуры и отнесенного давления характерна смена характера выпуклости. При изменении характера нагрева изолинии приведенного давления могут быть как замкнутыми, так и иметь бесконечно удаленные точки. У температуры такая качественная перестройка отсутствует.

ЛИНЕЙНАЯ КОНВЕКЦИЯ БЕНАРА - МАРАНГони ПРИ КВАДРАТИЧНОМ НАГРЕВЕ СВЕРХУ ПЛОСКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Отметим, что выше говорилось о гомеоморфизме температуры и давления, деленного на плотность, между типами нагрева I и II. В [13] изолинии проанализированы при $Mg = 0,01$ и $\delta = 1/2$, и было показано, что они являются глобально гиперболическими. Здесь же при изменении числа Марангони произошла качественная перестройка изолиний. Это произошло в силу того, что решения (2) являются квадратичными форма по переменной x , а коэффициенты форм зависят от координаты z и чисел подобия Марангони и δ . Таким образом, изолинии являются алгебраическими кривыми и в данном случае происходит смена типов кривой. При дальнейшем изменении безразмерных комплексов будет происходить изменение типа изолиний.

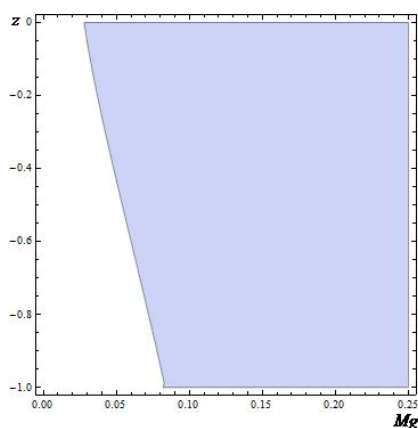


Рисунок 1 - Зависимость скорости V_z от числа Марангони для II случая нагрева

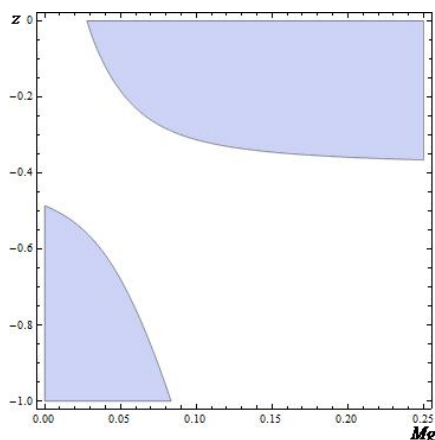


Рисунок 2 - Зависимость скорости V_x от числа Марангони для II случая нагрева

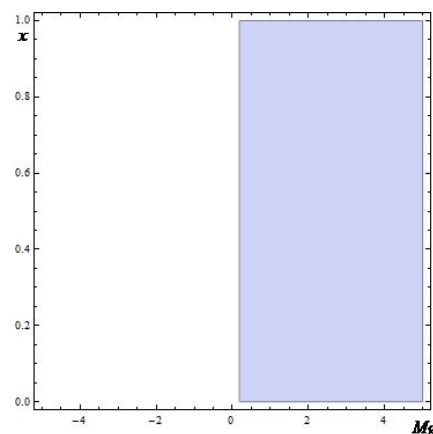


Рисунок 3 - Множество значений температуры на твердой границе при различных числах Марангони для II случая нагрева

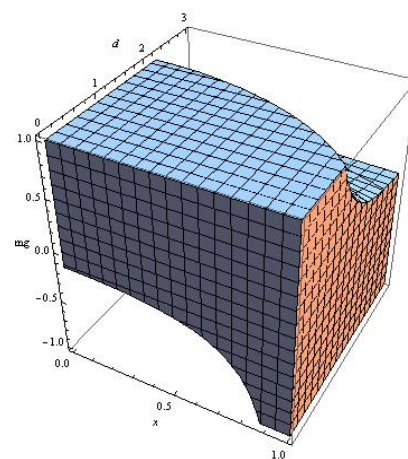


Рисунок 4 - Множество значений распределения температуры на твердой границе при различных числах Марангони и масштабного множителя для II случая нагрева

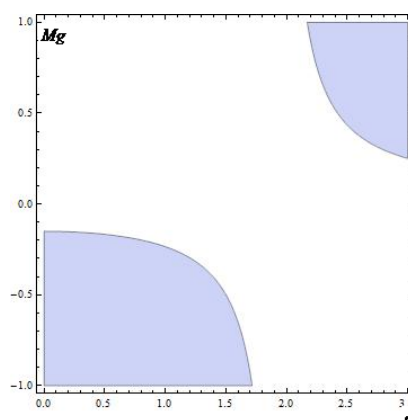


Рисунок 5 - Множество значений приведенного давления P_0 на твердой

границе при различных числах Марангони для II случая нагрева

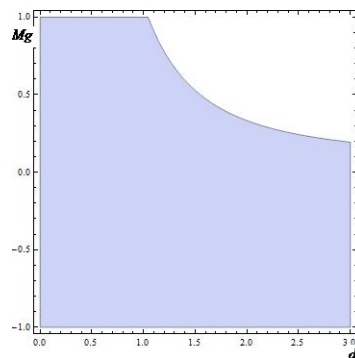


Рисунок 6 - Множество значений приведенного давления P на твердой границе при различных числах Марангони для II случая нагрева $x = 1$

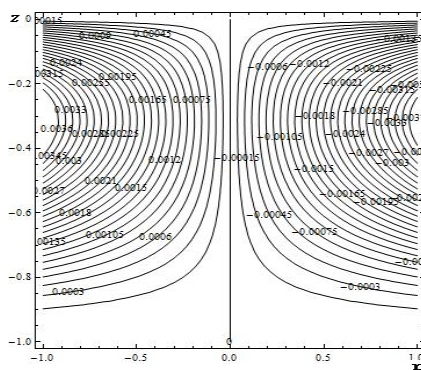


Рисунок 7 - Изолинии функции тока при $Mg = 0,1$ для II и IV случая нагревов

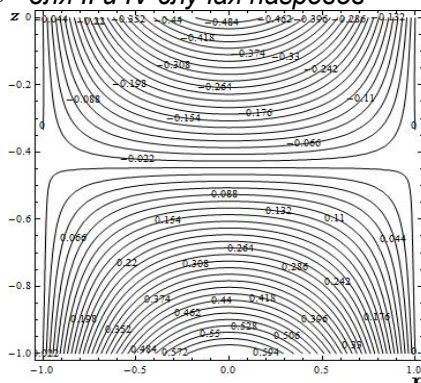


Рисунок 8 - Изолинии температуры при $Mg = 0,1$, $\delta = 1/2$ для II случая нагрева

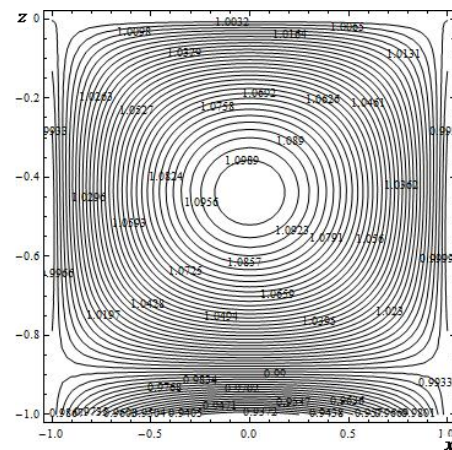


Рисунок 9 - Изолинии давления при $Mg = 0,1$, $\delta = 1/2$ для II случая нагрева

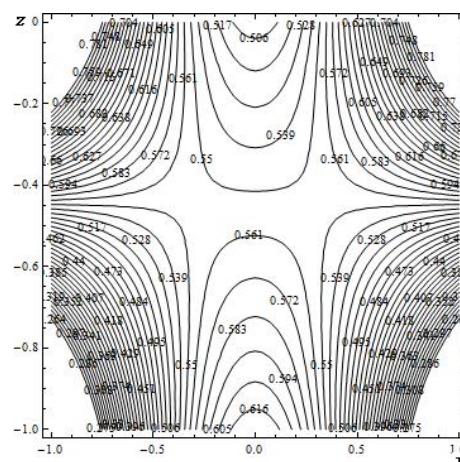


Рисунок 10 - Изолинии температуры при $Mg = 0,1$, $\delta = 1/2$ для IV случая нагрева

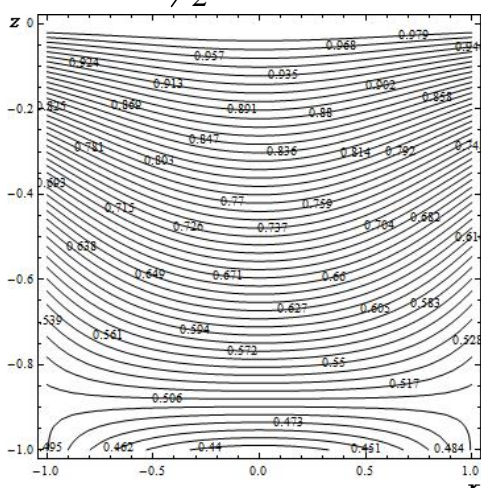


Рисунок 11 - Изолинии давления при $Mg = 0,1$, $\delta = 1/2$ для IV случая нагрева

ЛИНЕЙНАЯ КОНВЕКЦИЯ БЕНАРА - МАРАНГОНИ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ НАГРЕВЕ СВЕРХУ ПЛОСКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Заключение. В настоящей работе было проведено исследование конвекции Бенара - Марангони вязкой несжимаемой жидкости в плоском слое при квадратичном точечном подогреве верхней границы. Проведен анализ всех возможных типов нагревов. Вычислены плоские и пространственные множества постоянства знаков полей температуры и давления. Показано, что возможна перестройка типов изолиний (как локального, так и глобального). Указанные качественные и количественные изменения зависят от безразмерных числовых комплексов.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФСР МФП НТС (программа СТАРТ) и РФФИ (проект № 12-01-00023-а)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Остроумов Г.А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. М.: Гос.изд-во технико-теорет. лит-ры, 1952. 256 с.
2. Бирих Р.В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ, 1966, №3, с.69–72.
3. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392с.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. М.: Наука, 1989. 319с.
5. Андреев В.К. Решения Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения // Препринт №1-10, Красноярск: ИВМ СО РАН, 2010, 68с.
6. Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ, 2013, №2, с.3–29.
7. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь, 2006. 155 с.
8. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Киров: ВятГУ, 2011. 207с.
9. H. B'enard, Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en r'egime permanent. Th'ese. Paris:

Gauthier-Villars, 1901. 88 pp.; Ann. de Chim. et Phys., 1901. Vol.23. Pp. 62–144.

10. H. B'enard, "Etude exp'erimentale des courants de convection dans une nappe liquide. — R'egime permanent: tourbillons cellulaires" // J. Phys. Theor. Appl., 1900. Vol.9, no.1. Pp. 513–524.

11. H. B'enard, "Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. — M'ethodes optiques d'observation et d'enregistrement" // J. Phys. Theor. Appl., 1901. Vol.10, no.1. Pp. 254–266.

12. Аристов С.Н., Шварц К.Г. Конвективный теплообмен при локализованном нагреве плоского слоя вязкой несжимаемой жидкости. Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2013. №3. С. 53-58.

13. Аристов С.Н., Просвиряков Е.Ю. Об одном классе аналитических решений стационарной осесимметричной конвекции Бенара-Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2013, №3(32), с. 110–118.

14. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal., 1957, vol.1, no.1, pp.391–395.

15. Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье-Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // ТОХТ, 2009, т.43, №5, с.547–566.

Аристов С.Н. - д.ф.-м.н., главный научный сотрудник лаборатории гидродинамической неустойчивости Института механики сплошных сред УрО РАН, e-mail:asn@icmm.ru

Власова С.С. - аспирант Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева - КАИ, e-mail: sveta040790@yandex.ru

Просвиряков Е.Ю. - к.ф.-м.н., доцент кафедры машиноведения и инженерной графики Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева - КАИ, научный сотрудник лаборатории Прикладной механики Института машиноведения УрО РАН, e-mail: evgen_pros@mail.ru