

## ОБНАРУЖЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СВЕРХПРОВОДНИКОВОГО КВАНТОВОГО БИТА НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

С.Е. Радченко, А.В. Кривецкий, Д.К. Пицун, А.Б. Петухова

*Предложен равномерно наиболее мощный инвариантный алгоритм обнаружения изменения состояния квантового бита на основе контрастного обнаружения изменения резонансной частоты связанного с ним высокочастотного резонатора. Обнаружение изменения частоты производится на основе проверки статистических гипотез относительно параметров линейной аппроксимации фазочастотной характеристики резонатора. Результаты статистического моделирования показали эффективность алгоритма при небольших объемах выборки и подтвердили возможность его практического применения.*

*Ключевые слова: алгоритм обнаружения, плотность распределения вероятности, квантовый бит, фазочастотная характеристика, вероятность ложной тревоги.*

### ВВЕДЕНИЕ

В Межфакультетской лаборатории квантовой криогенной электроники НГТУ проводятся эксперименты по исследованию квантовых сверхпроводящих цепей, представленных квантовыми битами (кубитами) на основе сверхпроводящего кольца, разделенного тремя переходами Джозефсона [1, 2]. Ряд проводимых экспериментов предполагает изучение зависимости характеристик кубита от величины внешнего магнитного поля [3, 4]. Помимо измерения абсолютных значений параметров [3], практический интерес представляет определение величины внешнего магнитного поля, при котором происходит изменение состояния кубита. Для получения принципиальной возможности определения параметров кубита его индуктивно связывают с высокочастотным резонатором, в результате чего резонансная частота последнего зависит, среди прочего, от состояния кубита. Для того чтобы резонатор не оказывал влияния на квантовую природу связанного с ним кубита, необходимо ограничить мощность подаваемых в него измерительных сигналов на уровне -125 дБм. При этом уровень сигнала на выходе резонатора оказывается сопоставимым с уровнем собственных шумов измерительного оборудования. Применение классических методов измерения резонансной частоты [5] в данном случае существенно ограничено и приводит к необходимости проведения весьма продолжительных экспериментов.

В данной работе предлагается воспользоваться статистическим характером измерительной информации для сокращения време-

ни эксперимента, а также решить задачу определения величины магнитного поля, приводящей к изменению состояния кубита, как задачу обнаружения изменения резонансной частоты связанного с ним резонатора.

### АЛГОРИТМ ОБНАРУЖЕНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ РЕЗОНАНСНОЙ ЧАСТОТЫ

Резонатор, связываемый с кубитом, может быть представлен в виде параллельного колебательного контура (рисунок 1) с передаточной функцией [6]:

$$K(j\omega) = \frac{R}{1 + jR\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)},$$

где  $\omega$  – круговая частота,  $C$  – эквивалентная емкость,  $L$  – эквивалентная индуктивность,  $R$  – эквивалентное сопротивление резонатора.

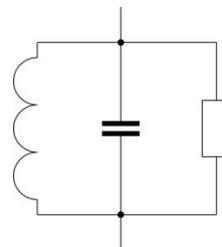


Рисунок 1 – Эквивалентная схема резонатора

В качестве измерительного сигнала будем использовать реализацию белого гауссова шума с известным статистическим описанием. Исходное состояние системы, изменение относительно которого необходимо обнаружить, зафиксируем в опорной выборке

**ПОЛЗУНОВСКИЙ ВЕСТНИК № 2 2016**

## ОБНАРУЖЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СВЕРХПРОВОДНИКОВОГО КВАНТОВОГО БИТА НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

$\mathbf{x} = \{x_i\}, i = 0..(N-1)$ . Текущее состояние системы фиксируется в рабочей выборке  $\mathbf{y} = \{y_i\}, i = 0..(N-1)$ . Используя эти выборки в качестве исходной информации для синтеза алгоритма обнаружения, можно сократить объем экспериментальных данных и, соответственно, длительность проведения эксперимента.

Поскольку отсчеты измерительного сигнала представляют собой гауссовы случайные величины, то и спектральные отсчеты выходных сигналов будут распределены по гауссову закону [7, 8]. В частности, отсчеты фазовой составляющей выходного сигнала могут быть представлены как случайные гауссовы величины, математическое ожидание которых равно соответствующим значениям фазочастотной характеристики (ФЧХ) резонатора, а дисперсия определяется дисперсией исходных отсчетов и уровнем шумов измерительного тракта. Если рассматривать только отсчеты ФЧХ в окрестности резонансной частоты, считая характеристику в этой области линейной, то распределения опорной и рабочей выборок могут быть записаны в виде:

$$\omega(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^N \exp\left[-\frac{\sum_{i=0}^{N-1} (x_i - ki - b_x)^2}{2\sigma^2}\right],$$

$$\omega(\mathbf{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^N \exp\left[-\frac{\sum_{i=0}^{N-1} (y_i - ki - b_y)^2}{2\sigma^2}\right],$$

где  $\sigma$  – среднеквадратическое отклонение шума,  $k$ ,  $b_x$ ,  $b_y$  – параметры линейной аппроксимации фазочастотной характеристики. Очевидно, что параметр  $k$ , определяющий наклон линейного участка, характеризует добротность резонатора, а  $b_x$  и  $b_y$  – резонансную частоту. Совместное распределение выборочных данных имеет вид:

$$\omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{2N} \times \exp\left[-\frac{\sum_{i=0}^{N-1} \left((x_i - ki - b_x)^2 + (y_i - ki - b_y)^2\right)}{2\sigma^2}\right]. \quad (1)$$

Задача обнаружения изменения резонансной частоты может быть сформулирована как задача проверки сложных [9] статисти-

ческих гипотез относительно параметров  $b_x$  и  $b_y$  распределения (1):

$$H_0 : b_y = b_x, k \in (0 \dots \infty), \text{изменения нет},$$

$$H_1 : b_y > b_x, k \in (0 \dots \infty), \text{изменение есть}. \quad (2)$$

Структура распределения (1) не позволяет осуществить прямой синтез равномерно наиболее мощного (РНМ) алгоритма обнаружения, поскольку распределение не принадлежит однопараметрическому экспоненциальному семейству [10]. Для отыскания алгоритма предлагается сузить область поиска до равномерно наиболее мощных инвариантных алгоритмов. Априорная неопределенность исходного постоянного смещения фазочастотной характеристики может быть представлена группой аддитивных преобразований, максимальным инвариантом для которой является статистика  $Z_i = y_i - x_i, i = 0..(N-1)$ , совместное распределение элементов которой имеет вид:

$$\omega(\mathbf{Z}) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\right)^N \exp\left[-\frac{1}{4\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} (Z_i - \Delta)^2\right], \quad (3)$$

где  $\Delta = b_y - b_x$ .

Задача обнаружения, таким образом, может быть переформулирована относительно параметров распределения (3):

$$H_0 : \Delta = 0, \text{изменение отсутствует},$$

$$H_1 : \Delta > 0, \text{изменение присутствует}.$$

Распределение (3) принадлежит [11] однопараметрическому экспоненциальному семейству:

$$\omega(\mathbf{Z}, \Delta) = C(\Delta) \exp(Q(\Delta)T(\mathbf{Z}))h(\mathbf{Z}),$$

где  $C(\Delta) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\right)^N \exp\left[-\frac{\Delta^2}{4\sigma^2}\right]$ ,  $T(\mathbf{Z}) = \sum_{i=0}^{N-1} Z_i$ ,

$$Q(\Delta) = \frac{\Delta}{2\sigma^2}, \quad h(\mathbf{Z}) = \exp\left[-\frac{1}{4\sigma^2} \sum_{i=0}^{N-1} Z_i^2\right].$$

Функция  $Q(\Delta)$  является неубывающей, поэтому [10] РНМ инвариантный алгоритм проверки гипотез (2) может быть представлен решающей функцией:

$$\varphi(\mathbf{Z}) = \begin{cases} 1, T(\mathbf{Z}) \geq C, \\ 0, T(\mathbf{Z}) < C. \end{cases} \quad (4)$$

Пороговая константа  $C$  определяется исходя из параметров распределения статистики  $T(\mathbf{Z})$  при отсутствии изменения резонансной частоты для заданного уровня вероятности ложного обнаружения [11]:

$$C = F^{-1}(1 - \alpha) \sigma \sqrt{2N},$$

где  $F^{-1}(1-\alpha)$  – квантиль уровня  $(1-\alpha)$  стандартного нормального распределения. Выражая значения статистики  $T(\mathbf{Z})$  через исходные наблюдения, преобразуем решающую функцию (4) к виду:

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - x_i) \geq C, \\ 0, & \sum_{i=0}^{N-1} (y_i - x_i) < C. \end{cases}$$

### МОДЕЛИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Численное моделирование работы алгоритма проводилось средствами MathCAD и LabVIEW. Для исходного значения резонансной частоты, составляющего 25 МГц, было получено 50 значений, соответствующих изменению эквивалентной индуктивности и проведены эксперименты по обнаружению изменения резонансной частоты при вероятности ложной тревоги, заданной на уровне 0.001. Ниже приведены полученные зависимости вероятности правильного обнаружения при различном количестве спектральных отсчетов, получаемых на протяжении линейной части ФЧХ (рисунок 2).

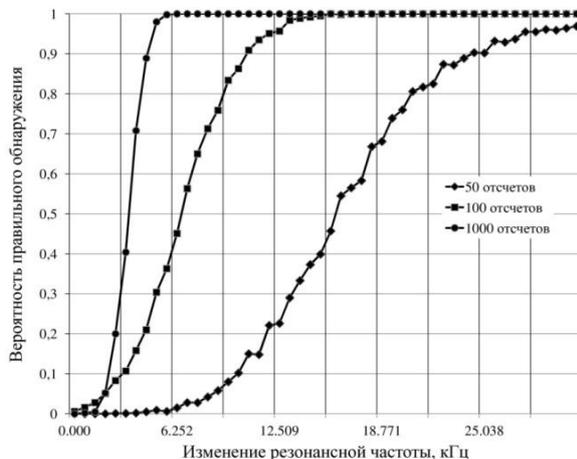


Рисунок 2 – Зависимость вероятности правильного обнаружения изменения резонансной частоты от величины изменения

Видно, что при обработке 100 спектральных отсчетов алгоритм с вероятностью около 95 % обнаруживает изменение резонансной частоты на 12.5 кГц, что составляет 0.05 %. На рисунке 3 приведены зависимости вероятности правильного обнаружения при разных уровнях вероятности ложного обнаружения. Видно, что, несмотря на снижение мощности алгоритма при снижении вероятности ложной тревоги, работу алгоритма можно

считать достаточно эффективной при  $\alpha = 0.001$ .

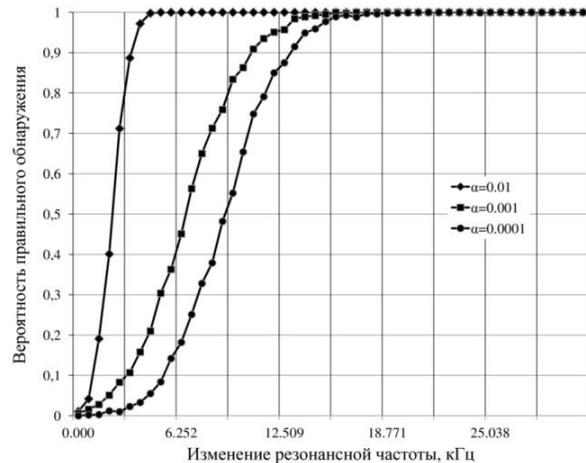


Рисунок 3 – Зависимость вероятности правильного обнаружения изменения резонансной частоты от величины изменения при разных уровнях вероятности ложной тревоги

### ВЫВОДЫ

На основе принципа инвариантности разработан равномерно наиболее мощный инвариантный алгоритм контрастного обнаружения изменения состояния квантового бита по изменению резонансной частоты связанного с ним высокочастотного резонатора. Обнаружение изменения резонансной частоты производится на основе проверки статистических гипотез относительно параметров линейной аппроксимации фазочастотной характеристики резонатора. Результаты статистического моделирования показали эффективность алгоритма при небольших объемах выборки и подтвердили возможность его практического применения.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-37-60077 мол\_а\_дк.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mooij, J. E. Josephson Persistent-current qubit / J. E. Mooij et al. // Science. – 1999. – Vol. 285. – P. 1036–1039.
2. Clarke, J. Superconducting quantum bits / J. Clarke, F. K. Wilhelm // Nature. – 2008. – Vol. 453. – P. 1031–1042.
3. Greenberg, Ya. S. Low-frequency characterization of quantum tunneling in flux qubits / Ya. S. Greenberg et al. // Physical Review B. – 2002. – Vol. 66. – P. 214525-1–214525-6.
4. Omelyanchouk, A. N. Quantum behavior of a flux qubit coupled to a resonator / A. N. Omelyanchouk // ПОЛЗУНОВСКИЙ ВЕСТНИК № 2 2016

## ОБНАРУЖЕНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ СВЕРХПРОВОДНИКОВОГО КВАНТОВОГО БИТА НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ИНФОРМАЦИИ

chouk, S. N. Shevchenko, Ya. S. Greenberg, O. Astafiev, E. Il'ichev // Low Temperature Physics. – 2010. – Vol. 36. – P. 893–1001.

5. Лаптев, Д. В. Вероятностная оценка метода совпадения при измерении частоты / Д. В. Лаптев, Ю. А. Пасынков // Ползуновский вестник. – 2013. – № 2. – С. 158–162.

6. Федоров, Н. Н. Основы электродинамики / Н. Н. Федоров. – М. : Высшая школа, 1980. – 399 с.

7. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы / С. И. Баскаков. – М. : Высшая школа, 2000. – 462 с.

8. Дженкинс, Г. Спектральный анализ и его приложения. Том 1. / Г. Дженкинс, Д. Ваттс. – М. : Мир, 1971. – 317 с.

9. Боровков, А. А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. А. А. Боровков. – М. : «Наука», 1984. – 472 с.

10. Богданович, В. А. Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов / В. А. Богданович, А. Г. Вострецов. – М. : Физматлит, 2004. – 320 с.

11. Закс, Ш. Теория статистических выводов / Ш. Закс. – М. : Мир, 1975. – 776 с.

**Радченко Сергей Евгеньевич** – кандидат технических наук, научный сотрудник кафедры конструирования и технологии радиоэлектронных средств Новосибирского государственного технического университета, e-mail: R1505@mail.ru.

**Кривецкий Андрей Васильевич** – кандидат технических наук, доцент кафедры конструирования и технологии радиоэлектронных средств, научный сотрудник межфакультетской лаборатории криогенной квантовой электроники НГТУ, e-mail: jcu@ngs.ru.

**Пицун Дмитрий Константинович** – аспирант кафедры конструирования и технологии радиоэлектронных средств Новосибирского государственного технического университета, e-mail: dmitrijpicun@rambler.ru.

**Петухова Александра Борисовна** – студент кафедры конструирования и технологии радиоэлектронных средств Новосибирского государственного технического университета.